

МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ
ХАРКІВСЬКИЙ НАЦІОНАЛЬНИЙ УНІВЕРСИТЕТ МІСЬКОГО
ГОСПОДАРСТВА імені О.М. БЕКЕТОВА

МЕТОДИЧНІ ВКАЗІВКИ

до самостійної роботи, підготовки до лекцій і практичних занять, розрахунково-
графічних та контрольних робіт
зі спецкурсу будівельної механіки

**«РОЗРАХУНОК СТАТИЧНО
НЕВИЗНАЧНИХ РАМ»**

*(для слухачів другої вищої освіти
спеціальності 7.06010101 - «Промислове та цивільне будівництво»)*

Методичні вказівки до самостійної роботи, підготовки до лекцій і практичних занять, розрахунково-графічних та контрольних робіт зі спецкурсу будівельної механіки «Розрахунок статично невизначених рам» (для слухачів другої вищої освіти спеціальності 7.06010101 - «Промислове та цивільне будівництво») / Харк. нац. ун-т міськ. госп-ва ім. О. М. Бекетова; уклад. О. О. Чупринін – Х. : ХНУМГ ім. О. М. Бекетова, 2014. – 70 с.

Укладач: О. О. Чупринін

Рецензент: к.т.н., доц. Н. В. Середа

Рекомендовано кафедрою теоретичної і будівельної механіки,
протокол № 7 від 20.02.2013 р

ВСТУП

Ці методичні вказівки призначені для самостійної роботи студентів при підготовці до лекцій та практичних занять і виконання розрахунково-графічного завдання. Вони містять теоретичні положення, вихідні дані для завдання та приклад його виконання. Призначені для слухачів другої вищої форми навчання.

Рама являє собою систему стержнів, з'єднаних між собою переважно жорстко. Розрахункову схему у вигляді плоскої рами звичайно обирають при розрахунку поперечника промислової або цивільної споруди.

Результатом розрахунку рами є епюри внутрішніх зусиль: згинаючих моментів – M , поперечних сил – Q і поздовжніх сил – N . Для розрахунку статично невизначної рами у розрахунково-графічному завданні застосовується метод сил. Назва методу вказує на те, що за основні невідомі в ньому приймаються зусилля.

Перш ніж приступити до виконання завдання, слід ознайомитися з теоретичним матеріалом, викладеним у главах 1, 2 [1], главі 7 [2], і в п. 1 цих вказівок. Крім того, слід розібрати приклади розрахунку 2.1, 2.5, 2.6, 2.7, наведені в [3].

Під час установочної сесії студентам читаються лекції з основних розділів спецкурсу будівельної механіки. У той же час кожному студенту видається контрольне завдання для виконання розрахунково-проектувальної роботи, а з метою виключення можливих запитань при виконанні домашньої контрольної роботи проводяться практичні заняття з розгляду основних положень домашнього завдання.

Конкретні числові завдання до кожної контрольної роботи студент вибирає сам із таблиць відповідно до його особистого шифру за трьома останніми цифрами номера залікової книжки. Наприклад, для залікової книжки № 81135 навчальний шифр 135, де 1 - перша, 3 - друга, 5 - третя цифри шифру.

1. ОСНОВНІ ТЕОРЕТИЧНІ ВІДОМОСТІ

Під дією зовнішнього навантаження, температури або зміщення опор споруди деформуються. При цьому координати даної точки перерізу споруди змінюються в результаті відносного подовження (скорочення) або скривлення її стержнів, тобто перерізи *переміщуються*. Визначенню переміщень звичайно передують визначення зусиль й побудова відповідних епюр.

Розрахунок механічної системи методом переміщень базується на наявних припущеннях опору матеріалів і теорії пружності, що відносяться до всієї споруди в цілому і пристосовується до лінійно-деформованих систем. Систем, що виконано з ідеально-пружного матеріалу, мають ідеальні шарнірні з'єднання, підпорядковуються принципу суперпозиції в умовах статичної дії сил. В стержні цій не враховується також зближення кінців стержня при його згині, тобто вплив поздовжніх і поперечних сил при визначенні деформації споруди.

В основі методу переміщень лежить принцип Лагранжа-Остроградського для пружних систем: в будь-якій пружній зрівноваженій механічній системі сума робіт всіх зовнішніх (W) і внутрішніх (U) сил на будь-яких можливих переміщеннях дорівнює нулю:

$$W = U = 0.$$

Можливими вважаються нескінченно малі переміщення, які не суперечать накладених на систему в'язям і відбуваються у фіксований момент часу.

В загальному випадку метод переміщень базується на роботі зовнішніх і внутрішніх сил, що прикладені до системи.

В механіці розрізняються дійсні і можливі переміщення. Дійсне переміщення відбувається під дією певних зовнішніх сил за проміжок часу Δt і завжди спрямоване в бік швидкості точки прикладання сили. Якщо до споруди прикладена певна сила, яка зростає від нуля до кінцевої величини F з порівняно невеликою швидкістю, то таке навантаження називається *статичним*, а сила - *статичною*. При повільному зростанні навантаження прискорення точок системи малі, а тому їх силами інерції можна знехтувати.

Розглянемо статичне навантаження пружної балки (рис. 1.1) зовнішньою силою F . Для лінійно-деформованих систем між деформацією Δ_y балки в напрямку дії сили і силою F існує рівність:

$$\Delta_y = kF, \quad (1.1)$$

де k – коефіцієнт пропорційності. Елементарна робота статичної сили і дорівнює:

$$dA^F = (F + dF)d\Delta y, \quad (1.2)$$

де dF – нескінченно малий приріст сили, якому відповідає нескінченно малий приріст переміщення $d\Delta y = k dF$ (рис. 1.1). Робота статично прикладеної сили F враховуючі рівність (1.1) і нехтуючи в виразі (1.2) нескінченно малими другого порядку, дорівнює

$$A^F = \int_0^{\Delta y} F d\Delta y = k \int_0^F F dF = \frac{kF^2}{2} = \frac{F\Delta y}{2},$$

і відповідає площі заштрихованого на рис. 1.2 трикутника. Таку роботу називають *дійсною*.

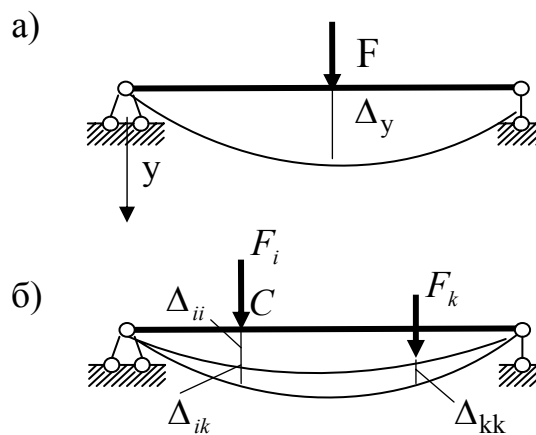


Рис. 1.1

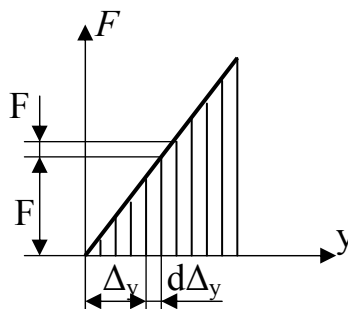


Рис. 1.2

Дійсна робота статично прикладеної сили F дорівнює половині добутку сили на дійсне переміщення Δ_y точки її прикладення в напрямку дії сили (теорема Клайперона).

Розглянемо далі таку саму пружну балку і прикладемо до неї спочатку статичну силу F_i , яка на дійснім переміщенні Δ_{ii} виконає дійсну роботу $A_{ii}^{F_i} = \frac{F_i \Delta_{ii}}{2}$. Потім до вже zdeформованої балки прикладається статична сила F_k , яка визиває переміщення Δ_{kk} і виконує дійсну роботу $A_{kk}^{F_k} = \frac{F_k \Delta_{kk}}{2}$. Сила F_i при цьому залишається сталою, її точка прикладення переміщується на Δ_{ik} , а сила виконує роботу

$$A_{ik}^{F_i} = F_i \Delta_{ik},$$

яка називається *можливою*. *Можливу роботу* здійснює незмінна за величиною сила на переміщеннях, зумовлених іншими діями. На рис. 1.1 переміщення Δ_{ik} може розглядатися як можливе переміщення точки прикладення сили F_i .

При визначенні деформацій споруд або їх елементів звичайно використовують узагальнені координати, узагальнені переміщення й узагальнені сили.

Узагальнені координати – незалежні між собою параметри, що однозначно визначають переміщення механічної системи. Узагальнені координати мають різні геометричні і механічні змісти. Це можуть бути деякі незалежні декартові координати, лінійні переміщення, кути повороту тощо. В опорі матеріалів та будівельній механіці – це звичайно переміщення (прогини) точок пружного тіла (наприклад, перерізів балок, вузлів ферми), кути повороту елементів споруд (наприклад стержні ферми або рами).

Узагальнені переміщення – нескінченно мали переміщення механічної системи в напрямку узагальнених координат. Для плоскої пружної механічної системи це звичайно лінійні переміщення Δx , Δy центру ваги перерізу стержня й кут повороту перерізу φ .

Якщо в результаті деформації споруди точка С перемістилась в положення C_1 (рис. 1.3,а), то для визначення її переміщення використаємо узагальнені координати x , y , а узагальнені переміщення позначимо як Δx , Δy . Як відомо з теоретичної механіки робота постійної сили F , яка прикладена в цій точці, буде

$$A^F = F \Delta x \cos 0^\circ + F \Delta y \cos 90^\circ = F \Delta x.$$

Отже при дії на споруду постійної сили F узагальненою силою буде сама сила F , а узагальненим переміщенням – поступальне переміщення Δx точки прикладення сили в напрямку сили. Яке дорівнює проекції повного переміщення CC_1 точки прикладення сили на напрямок дії сили.

При дії зосередженого моменту M в перерізі C споруди (рис. 1.3,б) він (переріз) повернеться на кут φ , а момент здійснить роботу $A^M = M\varphi$. Таким чином, зосередженому моменту M , як узагальнений сили, відповідає узагальнене переміщення у вигляді кута повороту φ перерізу стержня в точці прикладення моменту.

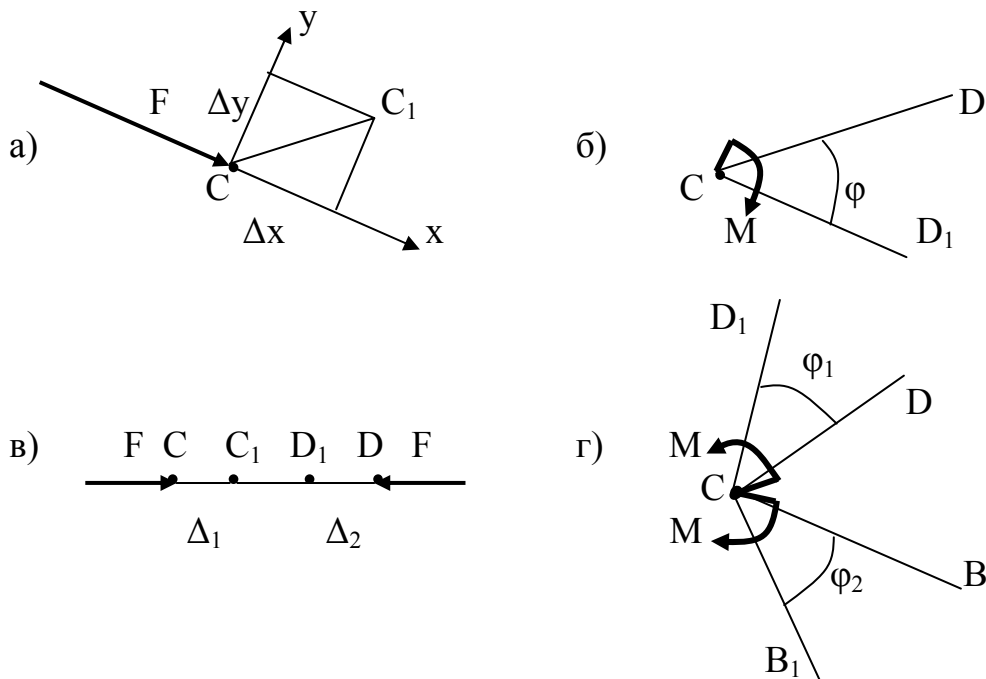


Рис. 1.3

Легко також показати, що:

- при дії на споруду двох постійних сил F , які спрямовані вздовж однієї прямої назустріч одна одної (рис. 1.3,в), узагальненою силою буде сила F , а узагальненим переміщенням – зміна відстані $\Delta = \Delta_1 + \Delta_2$ між точками прикладення сил;

- при дії на споруду двох однакових за величиною і протилежних за напрямом зосереджених моментів M (рис. 1.3,г) узагальненою силою буде момент M , а узагальненим переміщенням – зміна кута між переміщеннями: $\varphi = \varphi_1 + \varphi_2$.

В подальшому узагальнене переміщення (як лінійне, так і кутове) позначатиме літерою Δ з двома індексами. Перший індекс позначає місцезнаходження переміщення, вказує на узагальнену силу, яка відповідає характеру та напрямку переміщення. Другий індекс вказує на дію. Яка викликала це переміщення. Наприклад, на рис. 1.3,б узагальнене переміщення Δ_{ii} являє собою приміщення в напрямку сили F_i від дії цієї ж сили F_i , Δ_{ik} –

переміщення в напрямку узагальненої сили стану i від дії узагальненої сили стану k .

Узагальнене переміщення, яке обумовлене узагальненою силою, величина якої дорівнює одиниці. Позначатиме літерою δ і називатиме питомим узагальненим переміщенням або податливістю. Наприклад, коефіцієнт податливості δ_{ik} характеризує величину переміщення в напрямку i від дії в напрямку k одиничній узагальненої сили.

Отже на підставі принципу незалежності дії сил (принципу суперпозиції) будь який повний прогин механічної системи можна подати як суму прогинів від кожної узагальненої сили окремо:

$$\Delta_i = \Delta_{i1} + \Delta_{i2} + \dots + \Delta_{in} . \quad (1.3)$$

В виразі (1.3) для позначення повного переміщення i -тої точки зберігається лише перший індекс, який відповідає лише перший індекс, який відповідає характеру та напрямку переміщення.

Наприклад, на рис. 1.4 зображено три деформовані стани балки, що перебуває під дією узагальнених сил F_1 , F_2 і M . Повний прогин балки Δ_1 в напрямку узагальненої сили F_1 буде

$$\Delta_1 = \Delta_{11} + \Delta_{12} + \Delta_{13} . \quad (1.4)$$

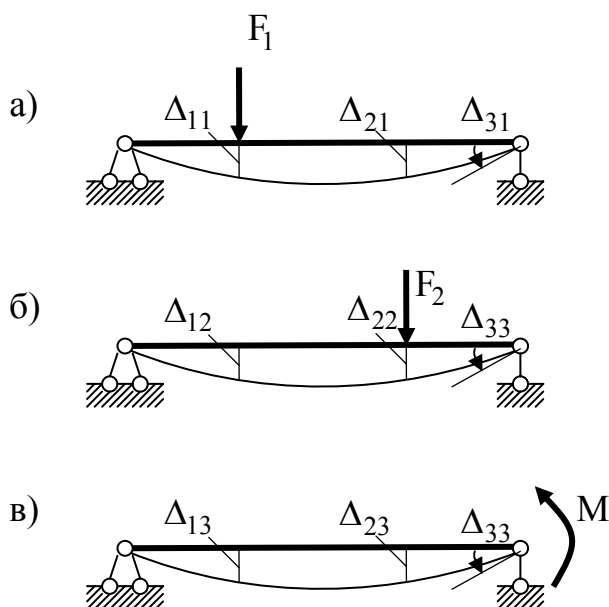


Рис. 1.4

На практиці звичайно узагальнені сили позначають однотипними літерами F_i , де i – номер узагальненої сили. Наприклад, для балки на рис. 1.4, в узагальненою силою F_3 буде: $F_3=M$.

Дійсний прогин механічної системи зручніше виразити через прогини, зумовлені дією одиничної сил, тобто через податливості:

$$\Delta_i = \delta_{i1}F_1 + \delta_{i2}F_2 + \dots + \delta_{in}F_n, \quad (1.5)$$

де δ_{ik} - переміщення від дії узагальненої сили $F_k=1$ в напрямку k , а індекс k змінюється від 1 до n .

В матричній формі рівняння, для переміщень i від 1 до n має вигляд

$$\Delta = BF, \quad (1.6)$$

де $\Delta = [\Delta_1, \dots, \Delta_n]^T$, $F = [F_1, \dots, F_n]^T$ - вектори-стовпці узагальнених переміщень та узагальнених сил, $B = [\delta_{ik}]$ - квадратна ($n \times n$) матриця податливостей.

З рівності (1.6) методом оберненої матриці B^{-1} можна визначити величини узагальнених сил:

$$F = B^{-1}\Delta = k\Delta,$$

де $k = [k_{ik}]$ - квадратна ($n \times n$) матриця, яку називають матрицею коефіцієнтів жорсткості механічної системи. Довільний коефіцієнт k_{ik} жорсткості дорівнює сили F_i від примусового переміщення $\Delta_k = 1$ за умови, що всі інші переміщення дорівнюють нулю.

Для визначення робіт внутрішніх сил розглянемо балку на рис. 1.5. У зв'язку з тим що система передбачається лінійно деформованою, для визначення в ній зусиль і переміщень можна скористатися принципом незалежності дії сил. Для цього розглянемо два стани балки: у першому діє сила F_i , а в другому – сила F_k . Виділимо в балці на відстані x від лівої опори елемент довжиною dx . У першому стані на гранях елемента діють внутрішні зусилля M_i та Q_i (рис. 1.6, а), у другому - M_k та Q_k (рис. 1.6, б). Ці зусилля в межах елемента можна вважати постійними.

Дія зусиль M_k у другому стані викликає викривлення осі елемента так, що кривина осі дорівнює $\chi_k = \rho_{\text{л}}^{-1}$, а кут між його гранями становить $\chi_k dx$ (рис. 1.6, в). Поперечні сили Q_k викликають зсув (рис. 1.6, г) так, що величина взаємного зміщення граней становить $\gamma_k dx$.

Тепер неважко записати можливу роботу внутрішніх сил елемента в першому стані на переміщеннях другого стану:

$$dU_{ik} = -M_i \cdot \chi_k dx - Q_i \cdot \gamma_k dx. \quad (1.7)$$

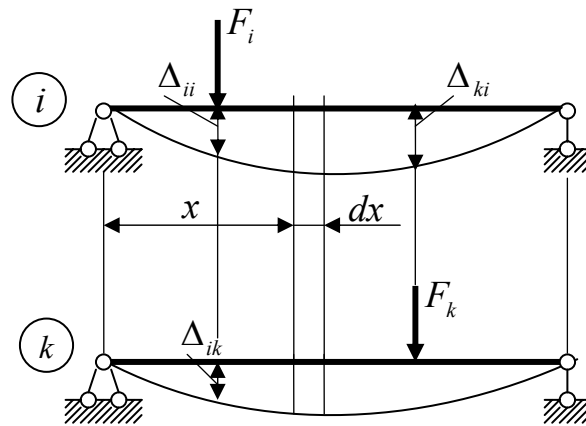


Рис. 1.5

Знак "мінус" пояснюється тим, що зусилля M_i та Q_i є зовнішніми по відношенню до елемента, а внутрішні зусилля спрямовані назустріч їм. Деформації χ_k й γ_k визначаються відомими з опору матеріалів формулами

$$\chi_k = \frac{1}{\rho} = \frac{M_k}{EI}, \quad \gamma_k = \mu \frac{Q_k}{GA},$$

де $\mu = A \int_{(A)} \left(\frac{S_z}{I_z b} \right)^2 dA$ - коефіцієнт, що враховує нерівномірність розподілу дотичних напружень у перерізі й залежить від форми поперечного перерізу.

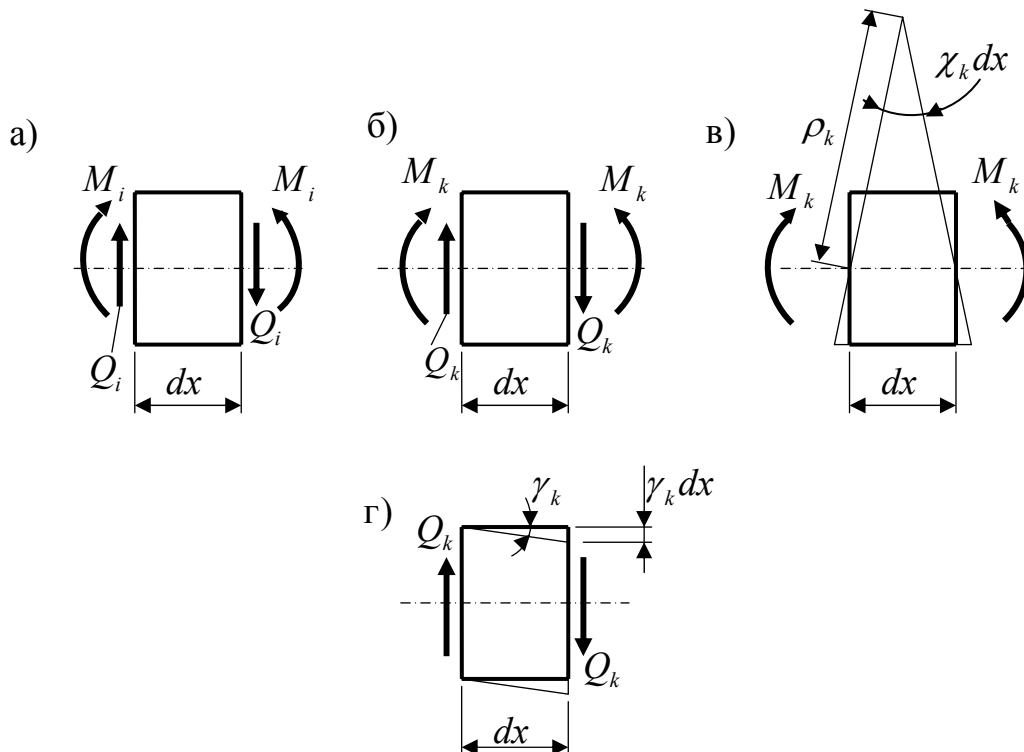


Рис. 1.6

Підставляючи вирази для χ_k та γ_k в (1.7), проінтегруємо обидві частини рівняння по всій довжині балки. Внаслідок одержимо можливу роботу U_{ik} :

$$U_{ik} = - \int_{(l)} \frac{M_i M_k}{E I} dx - \int_{(l)} \mu \frac{Q_i Q_k}{G A} dx. \quad (1.8)$$

У загальному випадку деформації плоскої системи в рівняння (1.8) додається робота поздовжніх сил N_i . При цьому слід урахувати, що осі системи можуть мати переломи й розгалуження, а функції внутрішніх зусиль – розриви. Тому, замінивши змінну x змінною s , що перебігає обрис осей системи, розіб'ємо інтеграл на суму інтегралів. Тоді остаточно можливу роботу внутрішніх сил в загальному вигляді запишемо так:

$$U_{ik} = - \sum \int_{(l)} \frac{M_i M_k}{E I} ds - \sum \int_{(l)} \mu \frac{Q_i Q_k}{G A} ds - \sum \int_{(l)} \frac{N_i N_k}{E A} ds. \quad (1.9)$$

За аналогією з (1.9) можна записати дійсну роботу внутрішніх сил першого стану U_{ii} , враховуючи, що деформації в цьому випадку визначаються зусиллями M_i , Q_i і N_i і лінійно зростають зі збільшенням навантаження:

$$U_{ii} = - \frac{1}{2} \sum \int_{(l)} \frac{M_i^2 ds}{E I} - \frac{1}{2} \sum \int_{(l)} \mu \frac{Q_i^2 ds}{G A} - \frac{1}{2} \sum \int_{(l)} \frac{N_i^2 ds}{E A}.$$

У подальшому знак (l) в інтегралів, що означає інтегрування вздовж кожного відрізка системи, іноді відкидатимемо.

Теореми про взаємність робіт і переміщень мають велике значення в загальній теорії дослідження напруженого й деформованого стану стержнів, пластин, оболонок та інш. Їх використання суттєво спрощує розв'язок багатьох задач опору матеріалів та будівельної механіки.

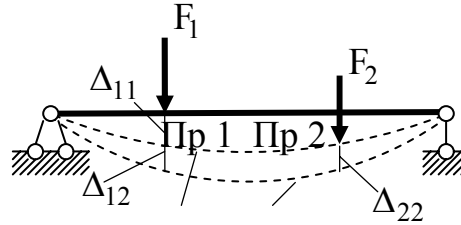
Теореми про взаємність робіт (теорема Бетті).

Розглянемо лінійно-деформовану систему, наприклад балку (рис. 1.7) у двох станах.

1. В першому стані (рис. 1.7,а) спочатку до балки статично прикладається узагальнена сила F_1 , яка викликає прогин $\text{Пр } 1$ і виконує дійсну роботу $A_{11}^{F_1} = \frac{F_1 \Delta_{11}}{2}$. Потім до вже zdeформованої балки статично прикладається узагальнена сила F_2 . В результаті балка отримує додаткову деформацію (прогин $\text{Пр } 2$), сила F_2 виконує дійсну роботу $A_{22}^{F_2} = \frac{F_2 \Delta_{22}}{2}$. Повна робота обох сил буде

$$A^{F_1; F_2} = A_{11}^{F_1} + A_{12}^{F_1} + A_{22}^{F_2} = \frac{F_1 \Delta_{11}}{2} + F_1 \Delta_{12} + \frac{F_2 \Delta_{22}}{2}. \quad (1.10)$$

а)



б)

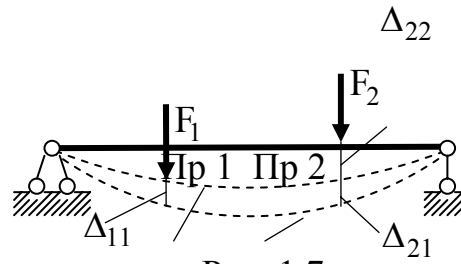


Рис. 1.7

2. В другому стані (рис. 1.7,б) навантаження балки подається в оберненій послідовності: спочатку статично прикладеною силою F_2 (прогин Пр 2, робота $A_{22}^{F_2} = \frac{F_2 \Delta_{22}}{2}$), а потім силою F_1 (прогин Пр 1, роботи $A_{11}^{F_1} = \frac{F_1 \Delta_{11}}{2}$, $A_{21}^{F_1} = F_2 \Delta_{21}$). Повна робота сил в цьому стані дорівнює

$$A^{F_2; F_1} = A_{22}^{F_2} + A_{21}^{F_1} + A_{11}^{F_1} = \frac{F_2 \Delta_{22}}{2} + F_2 \Delta_{21} + \frac{F_1 \Delta_{11}}{2}. \quad (1.11)$$

Для лінійно-деформівних систем за величиною переміщення Δ_{11} і Δ_{22} на рис. 1.7,а,б. Не залежить від черговості прикладення навантажень F_1 F_2 . Крім того, враховуючи принцип суперпозиції для переміщень, за величиною також і їх повні роботи (1.10) і (1.11) не залежать від послідовності навантаження балки:

$$A^{F_1; F_2} = A^{F_2; F_1}. \quad (1.12)$$

З виразу (1.12) приходимо до рівності:

$$A_{12}^{F_1} = A_{21}^{F_2}, \text{ або } F_1 \Delta_{12} = F_2 \Delta_{21}. \quad (1.13)$$

З рівняння (1.13) слід, що робота сили F_1 на переміщенні Δ_{12} , що викликане силою F_2 , дорівнює роботі сили F_2 на переміщенні, що викликане

силою F_1 . Цей висновок відом під назвою теореми про взаємність робіт (теореми Бетті): якщо є два зрівноважених стани пружної системи, то робота сил першого стану на переміщеннях другого дорівнює роботі сил другого стану на переміщеннях першого.

Теореми про взаємність переміщень (теорема Максвелла).

З теореми про взаємність робіт випливає ряд окремих теорем. Розглянемо випадок, коли пружна система навантажена узагальненими силами $F_1 = F_2 = F$ то з (1.13) одержимо

$$\Delta_{12} = \Delta_{21}. \quad (1.14)$$

Якщо, до того ж, узагальнені сили дорівнюють одиниці ($F_1 = F_2 = 1$), то

$$\delta_{12} = \delta_{21}. \quad (1.15)$$

Рівність (1.15) виражає теорему про взаємність переміщень (теорему Максвелла): для двох одиничних станів пружної системи переміщення в напрямку першої узагальненої сили, що викликане другою узагальненою силою чисельно дорівнює переміщенню в напрямку другої узагальненої сили, що викликане дією першої узагальненою силою.

Приклад використання теореми про взаємність переміщень.

Визначити прогини пружної балки $\Delta_2, \Delta_3, \Delta_4$ в точках 2, 3, 4, яку статично навантажено в точці 1 силою F (рис. 1.8)

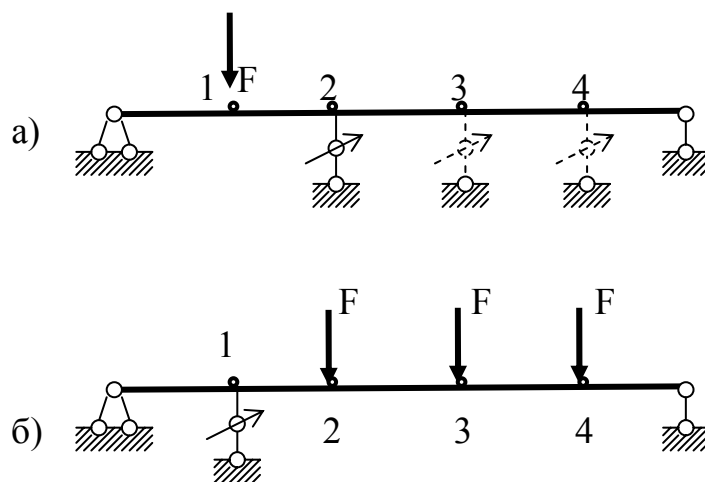


Рис. 1.8

Звичайний шлях вирішення цієї задачі полягає у статичному навантаженні балки в точки 1 силою F і використанні прогиновимірювача, що встановлюється послідовно в точках 2, 3, 4 балки (рис. 1.8,а). Однак інколи конструктивно в зазначених місцях балки встановлення вимірювача є неможливим або викликає неприпустимі вимірювальні похибки.

Використання теореми про взаємність переміщень дозволяє вирішити цю задачу іншим методом: прогиновимірник встановлюється в точці 1, а навантаження F прикладають до балки послідовно в точках 2, 3, 4. Відповідно теореми про взаємність переміщень прогини в точці 1 балки будуть дорівнювати шуканим прогинам $\Delta_2, \Delta_3, \Delta_4$.

Розрахунок статично невизначних систем, а також усіх систем на жорсткість пов'язаний із необхідністю обчислення переміщень. Найбільш загальними методами визначення переміщень у пружних системах є енергетичні, засновані на дослідженні потенціальної енергії системи. Одним із методів, що застосовується для визначення переміщень у лінійно деформованих системах, є *метод Мора*.

Нехай треба визначити переміщення Δ_i деякої точки балки від дії заданого навантаження (рис. 1.9, а). Розглянемо два стани цієї споруди: перший – дійсний стан при дії заданого навантаження (рис. 1.9, а), другий – допоміжний або одиничний стан, у якому за напрямком шуканого переміщення прикладена одинична узагальнена сила (рис. 1.9, б).

Робота одиничної сили на переміщеннях заданого стану $W_{if} = 1 \cdot \Delta_i$ за теоремою Бетті дорівнює роботі W_{fi} заданих сил на переміщеннях одиничного стану. Беручи до уваги, що $W_{fi} = -U_{fi}$, одержуємо на підставі (1.9):

$$\Delta_i = \sum_{(l)} \int \frac{M \bar{M}_i ds}{EI} + \sum_{(l)} \int \mu \frac{Q \bar{Q}_i ds}{GA} + \sum_{(l)} \int \frac{N \bar{N}_i ds}{EA}, \quad (1.16)$$

де M, Q, N - зусилля від заданого навантаження; $\bar{M}_i, \bar{Q}_i, \bar{N}_i$ - зусилля від одиничної сили у допоміжному стані.

Формулу (1.16) називають формулою Мора. За її допомогою можна визначити переміщення від навантаження при довільному навантаженні. Для цього:

- 1) визначають зусилля M, Q, N від заданого навантаження;
- 2) за напрямком шуканого переміщення прикладають одиничну узагальнену силу;
- 3) знаходять зусилля $\bar{M}_i, \bar{Q}_i, \bar{N}_i$ від одиничної сили;
- 4) вирази зусиль підставляють у праву частину (1.16) та інтегруванням уздовж осей усіх елементів споруди визначають шукане переміщення.

Обчислення переміщень за допомогою формули (1.16) називають *методом Мора*.

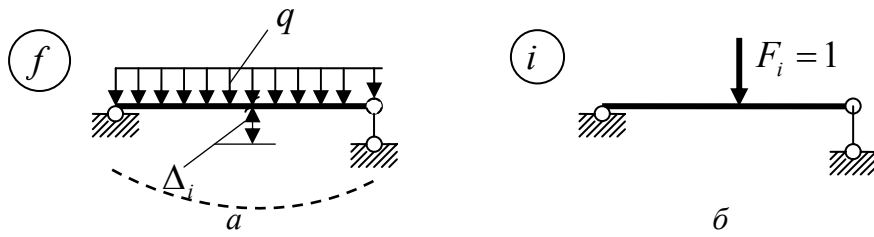


Рис. 1.9

В окремих випадках формула Мора набуває простішого вигляду. При розрахунку систем із переважним згином – балок і рам – вплив поперечних і поздовжніх деформацій на переміщення точок незначний. Тому для таких систем ураховують лише перший інтеграл виразу (1.16), тобто:

$$\Delta_i = \sum \int_{(l)} \frac{M \bar{M}_i ds}{EI}.$$

Якщо розбити систему на відрізки постійної жорсткості, маємо:

$$\Delta_i = \sum_{j=1}^n \left(\frac{1}{EI} \int_l M \bar{M}_i ds \right)_j. \quad (1.17)$$

Інтеграл $\int_l M \bar{M}_i ds$ у (1.17) називають інтегралом Мора. У деяких випадках обчислення цього інтегралу можна спростити.

У загальному випадку на ділянці прямого стержня постійної жорсткості раціонально скористатися *формулою Сімпсона* для чисельного інтегрування. Відповідно до цієї формули визначений інтеграл від функції $\varphi(s)$ на відрізьку $0 \leq s \leq l$ можна наближено знайти так:

$$\int_0^l \varphi(s) ds \approx \frac{l}{6} \left[\varphi(0) + 4\varphi\left(\frac{l}{2}\right) + \varphi(l) \right].$$

Ця формула ґрунтується на заміні підінтегральної функції квадратною параболою, тому у випадку, якщо функція $\varphi(s)$ дійсно квадратна парабола, вираз дає точний результат.

Застосовуючи формулу Сімпсона для перемноження двох епюр на відрізьку прямого стержня постійної жорсткості (рис. 1.10), одержуємо

$$\int_0^l M \bar{M}_i ds = \frac{l}{6} (M_{лів} \bar{M}_{лів} + 4M_{сер} \bar{M}_{сер} + M_{пр} \bar{M}_{пр}). \quad (1.18)$$

Тут індекси *лів*, *сер* і *пр* означають лівий, правий кінці та середину відрізка довжиною l .

Як свідчить аналіз, формула (1.18) є точною й у випадку, коли підінтегральна функція $M\bar{M}_i$ на відрізку від 0 до l є кубічною параболою, тобто містить вантажні моменти, окреслені за квадратною параболою (при $q = \text{const}$) та лінійно змінні одиничні моменти. Отже, формула Сімпсона дає точний результат для переважної більшості епюр, що зустрічається в практичних розрахунках.

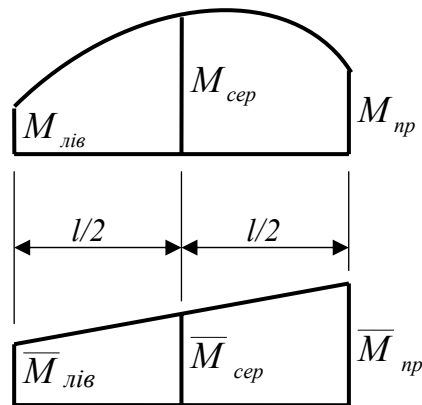


Рис. 1.10

В інших випадках застосування формули Сімпсона потребує розбивання епюр на відрізки досить малої довжини.

Якщо вантажні моменти окреслені за лінійною залежністю (при $q = 0$), тоді обидва моменти у середині дільниці можливо виразити через крайні значення (рис. 1.11):

$$M_{сер} = \frac{M_{лів} + M_{пр}}{2};$$

$$\bar{M}_{сер} = \frac{\bar{M}_{лів} + \bar{M}_{пр}}{2}.$$

Це дозволяє вираз (1.18) получить у вигляді:

$$\int_0^l M \bar{M}_i ds = \frac{l}{6} (2M_{лів} \bar{M}_{лів} + 2M_{пр} \bar{M}_{пр} + M_{пр} \bar{M}_{лів} + M_{лів} \bar{M}_{пр}). \quad (1.19)$$

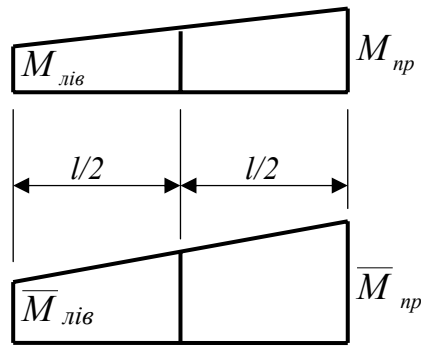


Рис. 1.11

У випадку, коли підінтегральний вираз у формулі (1.18) представляє з себе добуток двох функцій ($M\bar{M}_i$), одна з яких довільна, друга – лінійна (\bar{M}_i завжди лінійна, так як являє собою згинальний момент від одиничного навантаження – сили або моменту) інтеграл (1.18) можливо обчислити наступним чином:

$$\int_l M \bar{M}_i ds = \omega \cdot M_i^c,$$

де ω - площа вантажної епюри;

M_i^c - значення одиничного моменту під центром ваги вантажного моменту (рис. 1.12).

З урахуванням цього вираз (1.17) набуває вигляду:

$$\Delta_i = \sum_{j=1}^n \left(\frac{\omega \cdot M_i^c}{EI} \right)_j. \quad (1.20)$$

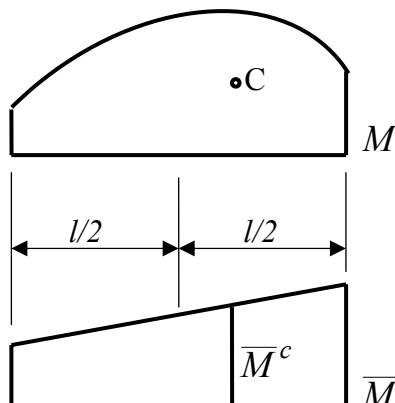


Рис. 1.12

2. МЕТОД СИЛ

Розглянемо загальну послідовність розрахунку статично невизначної рами методом сил.

1. *Визначення ступені статичної невизначності рами* виконують за формулою

$$n = 3K - \text{Ш} + C_0 - 3, \quad (2.1)$$

де K - число замкнутих контурів, утворених стержнями рами;

Ш - кількість простих шарнірів, що з'єднують стержні рами (нагадаємо, що складний шарнір при підрахунку замінюється еквівалентною кількістю простих шарнірів: $\text{Ш} = C - 1$, де C - кількість стержнів, що з'єднуються цим складним шарніром);

C_0 - число опорних в'язей.

Нагадаємо, що для системи без опор

$$n = 3K - \text{Ш}, \quad (2.1,a)$$

2. *Вибір основної системи.*

Основна система методу сил утворюється шляхом відкидання зайвих в'язей і заміни їх зусиллями. Ці зусилля позначаються X_1, X_2, \dots, X_n і називаються *зайвими невідомими*.

Можливі варіанти усунення зайвих в'язей наведені в табл. 2.1.


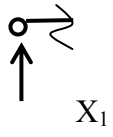


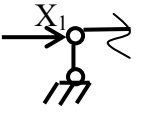
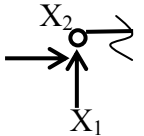

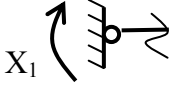
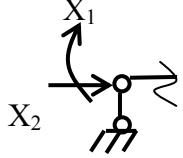
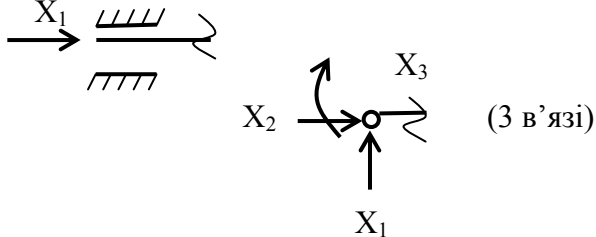

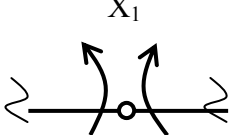
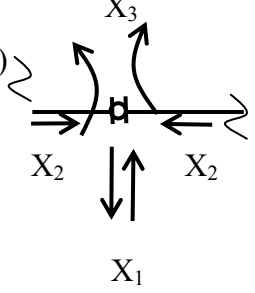
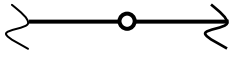
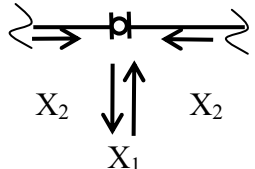
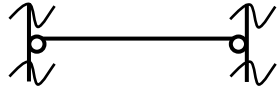
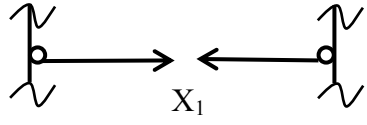
Нагадаємо, що основна система, одержана після відкидання зайвих в'язей, повинна бути геометрично незмінюваною.

Для симетричної рами слід обирати симетричну основну систему. При симетричному або кососиметричному навантаженні необхідно застосовувати групування невідомих і враховувати, що деякі невідомі повинні заздалегідь дорівнювати нулю.

3. *Запис канонічних рівнянь.*

Канонічні рівняння методу сил за фізичною суттю є умови сумісності деформацій. Зокрема i -те рівняння виражає умову відсутності переміщень у напрямку i -ї усунутої в'язі в основній системі (у напрямку невідомого X_i). Для рами з n невідомими складають n таких рівнянь:

Таблиця 2.1

Задана система	Основні варіанти відкидання в'язей та зайві невідомі (в дужках наведено кількість відкинутих в'язей)
Шарнірно рухома опора 	 (1 в'язь)
Шарнірно нерухома опора  або 	 (1 в'язь)  (2 в'язі)
Защемлення 	 (1 в'язь)  (2 в'язі)  (3 в'язі)
Стержень загального виду 	 (1 в'язь)  (3 в'язі)
Стержень з проміжним шарніром 	 (2 в'язі)
Ідеальний стержень 	 (1 в'язь)

$$\{0\} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \dots \\ 0 \\ \dots \\ 0 \end{bmatrix} - \text{нульовий вектор.}$$

4. Побудова епюр згинаючих моментів в основній системі.

Розглядаючи стан основної системи під дією кожного окремого невідомого $X_i = 1$, будують n епюр згинаючих моментів \bar{M}_i - одиничних епюр. Окремо виконують розрахунок основної системи на дію заданого навантаження і будують епюру M_f - вантажну епюру.

5. Визначення коефіцієнтів і вільних членів канонічних рівнянь.

Коефіцієнтами канонічних рівнянь є одиничні переміщення. Зокрема, δ_{ik} - це переміщення в напрямку i -ї зайвої в'язі (в напрямку X_i) від дії зайвого невідомого $X_k = 1$.

Одиничні переміщення визначаємо методом Мора за формулою

$$\delta_{ik} = \sum \frac{1}{EI} \int \bar{M}_i \bar{M}_k dx; \quad i=1, 2, \dots, n; \quad k=1, 2, \dots, n \quad (2.3)$$

шляхом перемноження епюр \bar{M}_i та \bar{M}_k із застосуванням правила Верещагіна або формули Сімпсона.

Вантажні переміщення визначаємо аналогічно методом Мора:

$$\Delta_{if} = \sum \frac{1}{EI} \int \bar{M}_i M_f dx; \quad i=1, 2, \dots, n \quad (2.4)$$

шляхом перемноження епюр \bar{M}_i і M_f .

Нагадаємо, що перемноження епюр виконують по ділянках прямих стержнів постійної жорсткості.

За правилом Верещагіна результат перемноження двох епюр M_1 і M_2 на ділянці дорівнює добутку площі ω , криволінійної епюри на розташовану під її центром ваги ординату y_0 лінійної епюри (див. рис. 2.1): $\int \bar{M}_i M_f dx = \omega \cdot y_0$. Епюра, на якій знаходиться ω повинна бути такою, що її площа і центр ваги відомі, а епюра, на якій береться ордината y_0 , обов'язково повинна бути лінійною.

Результат перемноження буде додатним, якщо площа ω і ордината y_0 розташовані по один бік стержня (одного знаку).

За формулою Сімпсона обидві епюри, що перемножуються, повинні бути або лінійними, або одна з них лінійна, а інша – квадратна парабола. Тоді за рис. 2.2:

$$\int M_1 M_2 dx = \frac{\ell}{6} (M_1^H M_2^H + 4 \cdot M_1^C M_2^C + M_1^K M_2^K). \quad (2.6)$$

Тут ординати епюр беруть з урахуванням їхніх знаків.

З формули (2.4) випливає, що головні переміщення (такі, що розташовані на головній діагоналі матриці коефіцієнтів $\{D\}$) завжди додатні:

$$\delta_{ik} \geq 0 \quad \text{при } i=k.$$

Інші – побічні – переміщення можуть бути як додатними, так і від’ємними, а отже й нульовими.

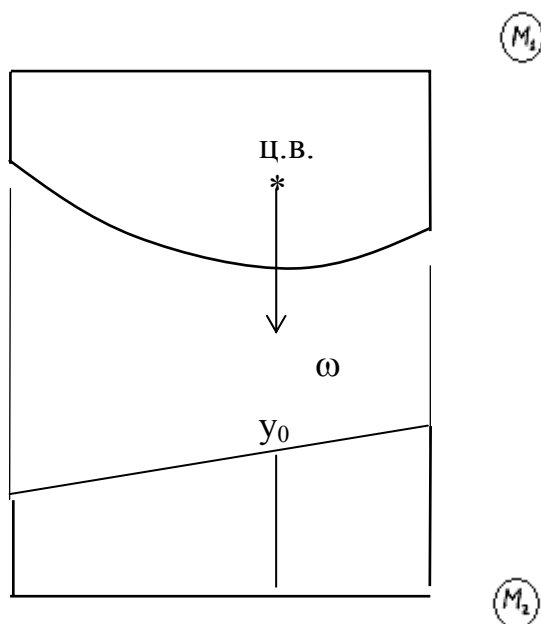


Рис. 2.1

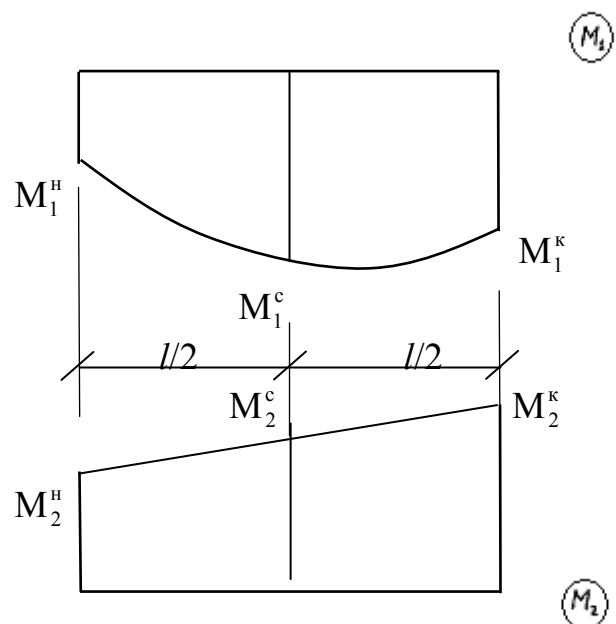


Рис. 2.2

Формула Сімпсона дозволяє записати визначення переміщень у матричній формі:

$$\{D\} = \{\bar{M}\}^T \{L\} \{\bar{M}\}; \quad (2.7)$$

$$\{\Delta\} = \{\bar{M}\}^T \{L\} \{M_f\}, \quad (2.8)$$

де:

$$\{\bar{M}\} = \begin{bmatrix} \{\bar{M}_{11}\} & \{\bar{M}_{12}\} & \dots & \{\bar{M}_{1i}\} & \dots & \{\bar{M}_{1n}\} \\ \{\bar{M}_{21}\} & \{\bar{M}_{22}\} & \dots & \{\bar{M}_{2i}\} & \dots & \{\bar{M}_{2n}\} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \{\bar{M}_{j1}\} & \{\bar{M}_{j2}\} & \dots & \{\bar{M}_{ji}\} & \dots & \{\bar{M}_{jn}\} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \{\bar{M}_{m1}\} & \{\bar{M}_{m2}\} & \dots & \{\bar{M}_{mi}\} & \dots & \{\bar{M}_{mn}\} \end{bmatrix} - \text{блочна матриця}$$

одиничних моментів, елементами якої є вектори $\{\bar{M}_{ji}\} = \begin{bmatrix} \bar{M}_{ji}^H \\ \bar{M}_{ji}^C \\ \bar{M}_{ji}^K \end{bmatrix}$, що містять

значення згинаючих моментів на початку (\bar{M}_{ji}^H) , у середині (\bar{M}_{ji}^C) і в кінці (\bar{M}_{ji}^H) ділянки j епюри згинаючих моментів \bar{M}_i ;

$$\{M_f\} = \begin{bmatrix} \{M_{1f}\} \\ \{M_{2f}\} \\ \dots \\ \{M_{jf}\} \\ \dots \\ \{M_{mf}\} \end{bmatrix} - \text{балочний вектор вантажних моментів, елементами}$$

якого є вектори $\{\bar{M}_{jf}\} = \begin{bmatrix} M_{jf}^H \\ M_{jf}^C \\ M_{jf}^K \end{bmatrix}$, що містять значення згинаючих моментів на

початку (\bar{M}_{jf}^H) , у середині (\bar{M}_{jf}^C) і в кінці (\bar{M}_{jf}^H) ділянки j епюри згинаючих моментів M_f ;

$$\{L\} = \begin{bmatrix} \{L_1\} & \{0\} & \dots & \{0\} & \dots & \{0\} \\ \{0\} & \{L_2\} & \dots & \{0\} & \dots & \{0\} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \{0\} & \{0\} & \dots & \{L_j\} & \dots & \{0\} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \{0\} & \{0\} & \dots & \{0\} & \dots & \{L_m\} \end{bmatrix} - \text{діагональна блочна матриця}$$

піддатливості, елементами якої є діагональні блочні матриці

$$\{L_j\} = \begin{bmatrix} \frac{\ell_j}{EI_j} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{4\ell_j}{EI_j} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\ell_j}{EI_j} \end{bmatrix} \text{ піддатливості ділянки } j \text{ рами та } \{0\} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} -$$

нульові матриці;

ℓ_j - довжина ділянки j ;

EI_j - жорсткість стержня на ділянці j ;

m – кількість ділянок рами;

індекс “Т” біля матриці означає операцію транспонування матриці – заміну її стовпчиків на рядки й навпаки.

6. Перевірка одиничних та вантажних переміщень.

При ручному розрахунку така перевірка є бажаною. Побудувавши допоміжну, так звану сумарну одиничну епюру моментів

$$\bar{M}_s = \bar{M}_1 + \bar{M}_2 + \dots + \bar{M}_i + \dots + \bar{M}_n,$$

перевіряють виконання таких співвідношень:

$$\delta_{is} = \sum \frac{1}{EI} \int \bar{M}_i \bar{M}_s dx = \sum_{i=1}^n \delta_{ik}, \quad i = 1, 2, \dots, n; \quad (2.9)$$

$$\Delta_{sf} = \sum \frac{1}{EI} \int \bar{M}_s M_f dx = \sum_{i=1}^n \Delta_{if}. \quad (2.10)$$

Співвідношення (2.9) означає, що результат перемноження i -ї одиничної епюри моментів \bar{M}_i з сумарною одиничною епюрою \bar{M}_s повинен дорівнювати сумі коефіцієнтів i -го канонічного рівняння. Таку перевірку необхідно виконати для кожного рівняння (для кожної одиничної епюри).

Аналогічно, за (2.10) результат перемноження сумарної одиничної епюри моментів \bar{M}_s з вантажною епюрою M_f повинен дорівнювати сумі всіх вільних членів канонічних рівнянь.

7. Розв'язання системи рівнянь.

Підставивши у канонічні рівняння (2.2) значення коефіцієнтів δ_{ik} і вільних членів Δ_{if} , розв'язуємо їх будь-яким відомим способом. Наприклад, розв'язування матричного рівняння (2.3) має такий вигляд:

$$\{X\} = -\{D\}^{-1}\{\Delta\}, \quad (2.11)$$

де позначення “-1” означає операцію обертання матриці.

При ручному розв’язанні результат бажано перевірити підстановкою знайдених значень X_i у вихідні рівняння.

8. Побудова остаточної епюри згинаючих моментів.

Звичайно значення остаточної згинаючих моментів знаходять із застосуванням принципу незалежності дії сил:

$$M = \bar{M}_1 X_1 + \bar{M}_2 X_2 + \dots + \bar{M}_i X_i + \dots + \bar{M}_n X_n + \dots + M_f. \quad (2.12)$$

При ручному розрахунку попередньо будують так звані “виправлені” епюри моментів M_i . Їх одержують помноженням одиничних епюр на відповідні значення зайвих невідомих:

$$M_i = \bar{M}_i \cdot X_i, \quad i = 1, 2, \dots, n. \quad (2.13)$$

Далі підсумовують виправлені епюри M_i з вантажною епюрою M_f .

9. Перевірка остаточної епюри згинаючих моментів.

Статична перевірка епюри M являє собою перевірку рівноваги її вузлів. Ця перевірка є допоміжною, оскільки статичні рівняння повинні перевірятися при побудові епюр згинаючих моментів в основній системі.

Кінематичну перевірку звичайно виконують в універсальному варіанті:

$$\Delta_s = \sum \frac{1}{EI} \int \bar{M}_s M dx = 0. \quad (2.14)$$

Тобто результат перемноження остаточної M і сумарної одиничної \bar{M}_s епюр згинаючих моментів повинен дорівнювати нулю.

10. Побудова епюри поперечних сил.

Найбільш зручно обчислювати значення поперечних сил на ділянках стержнів за формулою

$$Q_{\text{лів}}^{\text{прав}} = \frac{M_{\text{прав}} - M_{\text{лів}}}{\ell} \pm \frac{q\ell}{2}, \quad (2.15)$$

де $M_{\text{прав}}$, $M_{\text{лів}}$ - значення згинаючих моментів відповідно на лівому й правому кінцях ділянки;

ℓ - довжина ділянки.

Нагадаємо: 1) значення моментів беруть з урахуванням їхніх знаків; 2) стержень орієнтується так, як він був зорієнтований при визначенні знаків моментів (додатні моменти розташовані знизу); 3) знаки “+” і “-” перед другим додатком відповідають розташуванням індексів “лів” і “прав” поперечної сили для розподіленого навантаження, спрямованого донизу.

Для визначення поздовжніх сил зручно застосовувати спосіб вирізання вузлів. При цьому слід пам'ятати, що на кінцях кожного стержня у вузлі діють як поздовжні, так і поперечні сили. Поперечні сили прикладають так, щоб додатні сили намагалися обернути вузол за годинниковою стрілкою, а від'ємні – проти.

3. МЕТОД ПЕРЕМІЩЕНЬ

Метод переміщень найбільше просто застосовується для розрахунку статично невизначених рам, що складаються з прямих стержнів постійної жорсткості. При цьому вводять наступні припущення:

- подовжніми і поперечними деформаціями стержнів при визначенні переміщень зневажають;
- зміни відстаней між кінцями стрижнів за рахунок скривлення їхніх осей не беруть до уваги.

Розглянемо метод переміщень на прикладах.

Приклад 1. Обрати основну систему для рами, наведеної на рис. 3.1.

Розв'язання

Визначимо ступінь кінематичної невизначеності.

Кількість кутових зміщень вузлів (поворотів) дорівнює кількості жорстких вузлів рами. У розглянутому прикладі такими є вузли 1, 2, 3, 4 та 6 (зауважимо, що у вузлі 6 стержні 3-6 і 6-8 з'єднані жорстко, отже такий вузол також необхідно враховувати). Відповідно кількість кутових зміщень вузлів $n_y = 5$.

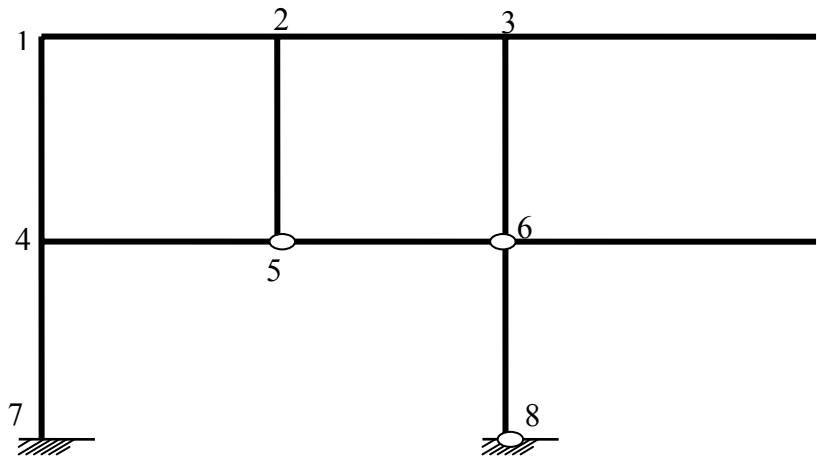


Рис. 3.1

Для визначення кількості лінійних зміщень перетворимо задану раму в шарнірно-стержневу схему. Для цього поставимо в усі вузли, разом з опорними, шарніри (рис. 3.2, а).

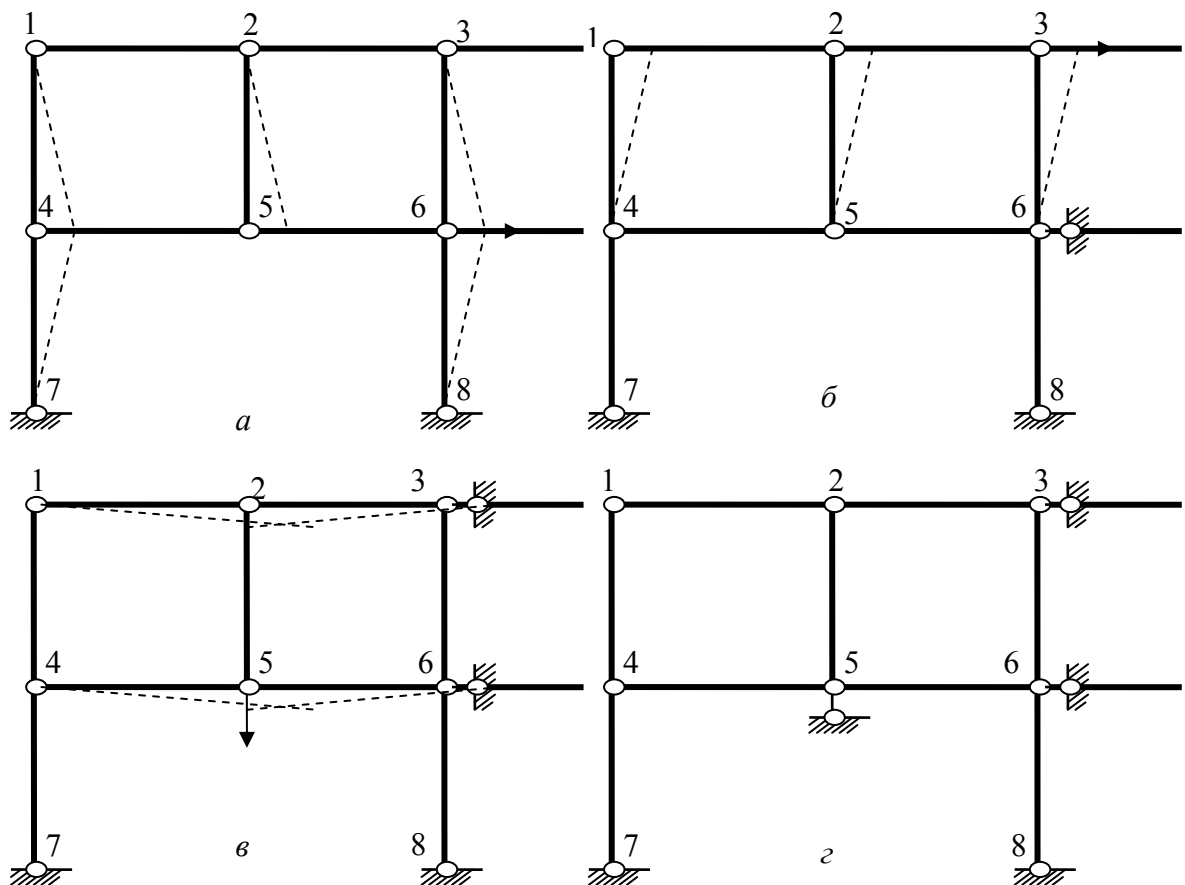


Рис. 3.2

Як бачимо, вузли 4, 5, і 6 можуть зміщуватись уздовж горизонталі за рахунок повороту стержнів 4-7 і 6-8. Поставивши в'язь, наприклад, у вузлі 6 (рис. 3.2,б), це переміщення буде усунене. Аналізуючи схему на рис. 3.2,б, бачимо, що можливим залишається переміщення вузлів 1, 2, 3 вздовж горизонталі. В'язь, поставлена, наприклад, у вузлі 3 (рис. 3.2,в), усуває це переміщення. Далі за рис. 2,в бачимо, що можливим залишається вертикальне переміщення вузлів 2 та 5. Після постановки в'язі, наприклад, у вузлі 5 (рис. 3.2,г), стає неможливим і це переміщення. Як показує аналіз схеми на рис. 3.2,г, при наявності поставлених трьох в'язей усі вузли шарнірно-стержневої схеми рами не можуть зміщуватися. Отже, кількість лінійних зміщень вузлів заданої рами становить $n_{\text{л}}=3$.

Тепер можна визначити ступінь кінематичної невизначності рами:

$$n = n_y + n_{\text{л}} = 5 + 3 = 8.$$

Обираючи основну систему відповідно до виявлених можливих переміщень вузлів ставимо у вузли 1, 2, 3, 4, 6 плаваючі затиснення, а вздовж лінійних зміщень опорні в'язі. При цьому горизонтальне зміщення вузлів 4, 5, 6 можна усунути не обов'язково в'яззю у вузлі 6, як це було зроблено в

шарнірно-стержневій схемі, а у вузлі 4 (рис. 3.4). Стрілками на одержаній таким чином основній системі показані прийняті додатні напрямки відповідних переміщень, а їхня нумерація (Z_1, Z_2, \dots, Z_8) має довільний порядок.

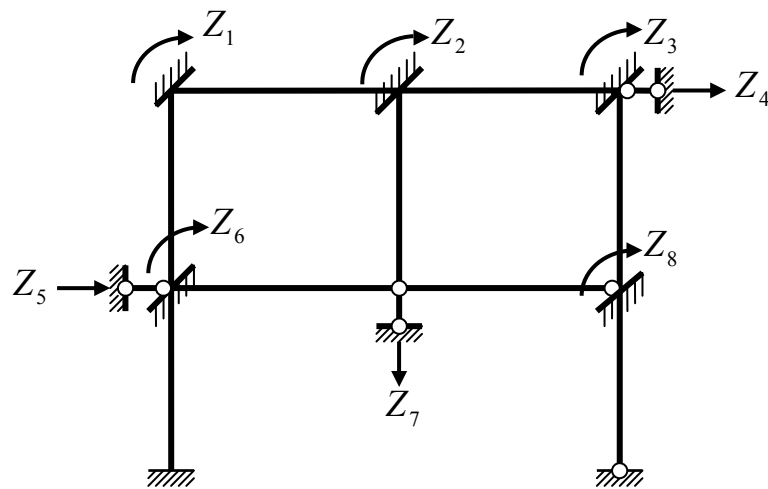


Рис. 3.3

Приклад 2. Обрати основну систему для рами, наведеної на рис. 3.4.

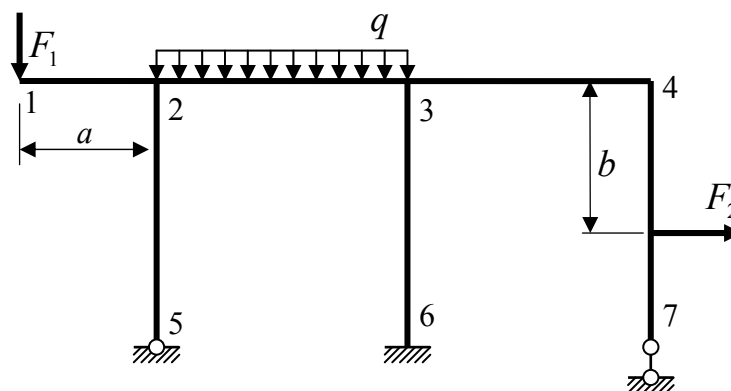


Рис. 3.4

Розв'язання.

Для підрахунку кількості зміщень вузлів рами слід звернути увагу на деякі особливості цієї рами. Зауважимо, що консольна частина рами (стержень 1-2) є статично визначною й при підрахунку кількості невідомих переміщень на неї можна не звертати увагу. Крім того, реакція в рухомій шарнірній опорі (вузол 7) за умов мализни переміщень спрямована вздовж стержня 4-7. Отже, з точки зору обчислення згинаючих моментів стержень 4-7 можна вважати шарнірно рухомою опорою. На підставі наведеного аналізу для визначення

згинаючих моментів наведену раму можна замінити схемою, зображеною на рис. 3.5. Значення вузлових моментів будуть такі:

$$M_2 = F_1 a; \quad M_4 = F_2 b$$

Для розрахункової схеми (рис. 3.5) маємо два жорстких вузли 2 і 3, отже $n_y = 2$.

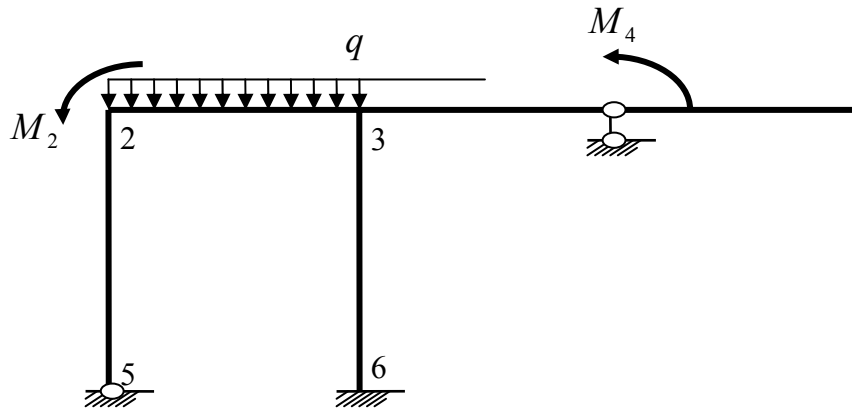


Рис. 3.5

За шарнірно-стержневою схемою (рис. 3.6) маємо одне лінійне зміщення вузлів ригеля 2-3-4 вздовж горизонталі.

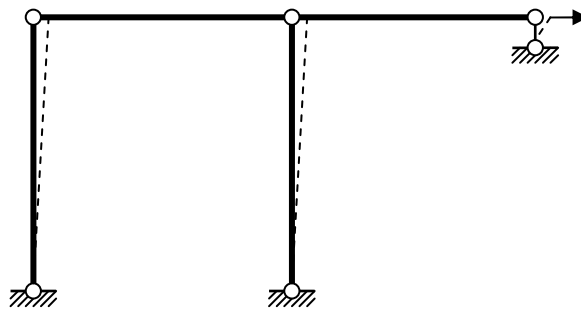


Рис. 3.6

Отже, $n = 2 + 1 = 3$ і, обираючи основну систему, необхідно поставити два плаваючі затиснення: у вузлах 2 та 3 і один горизонтальний стержень, наприклад, у вузлі 4 (див. рис. 3.7).

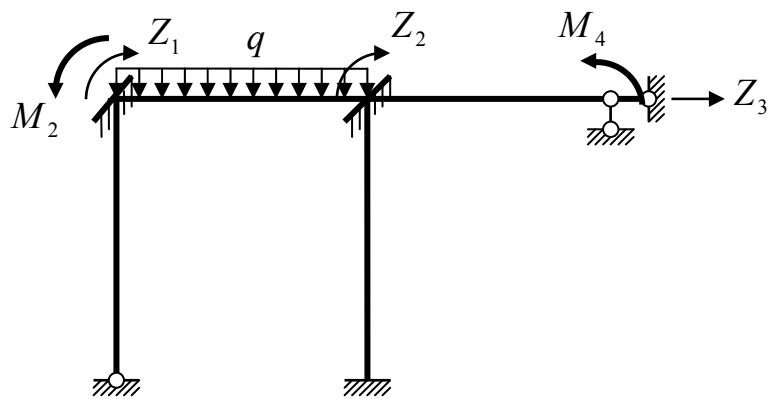


Рис. 3.7

Z_1, Z_2, Z_3 - шукані переміщення вузлів – основні невідомі методу переміщень.

Приклад 3. Виконати розрахунок рами, наведеної на рис. 3.8.

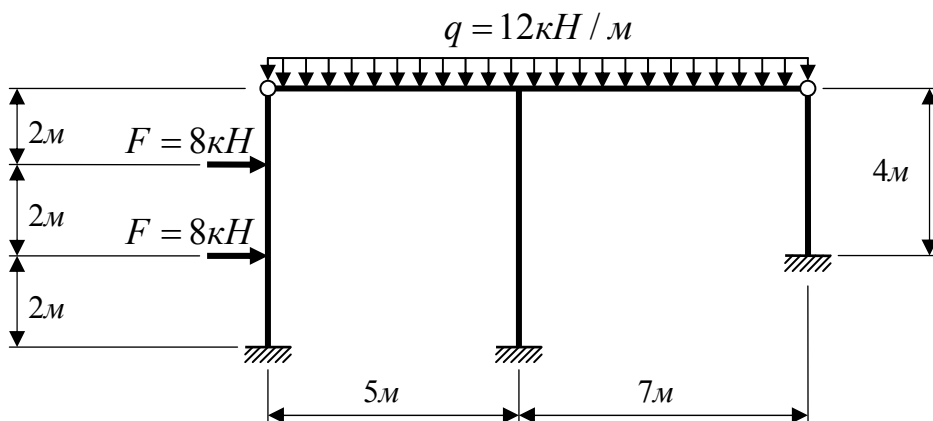


Рис. 3.8

Розв'язання.

1. *Визначаємо ступінь кінематичної невизначності рами.*

Рама має один жорсткий вузол – середній вузол ригеля і одне лінійне зміщення – зміщення вузлів ригеля уздовж горизонталі. Отже ступінь кінематичної невизначності рами становить $n = 2$.

2. *Обираємо основну систему.*

Для цього ставимо плаваюче затиснення в жорсткому вузлі та горизонтальний опорний стержень, наприклад, у правому вузлі ригеля (рис. 3.9).

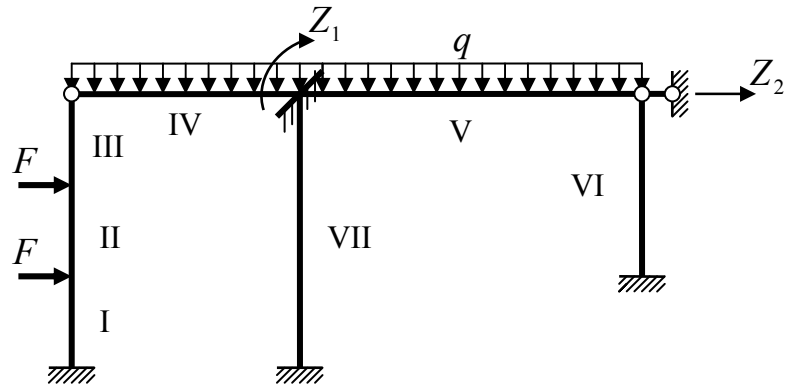


Рис. 3.9

IV

3. Записуємо канонічні рівняння.

$$\begin{aligned} r_{11}Z_1 + r_{12}Z_2 + R_{1f} &= 0; \\ r_{21}Z_1 + r_{22}Z_2 + R_{2f} &= 0; \end{aligned} \quad (3.1)$$

4. Будуємо епюри згинаючих моментів в основній системі. Обираємо співвідношення жорсткостей ригеля і стояків 4:1, тобто $EI_c = EI, EI_p = 4EI$.

а) Епюра згинаючих моментів від повороту плаваючого затиснення $Z_1 = 1$ (рис. 3.10). На рисунку пунктирними лініями показано деформації стержнів від повороту затиснення.

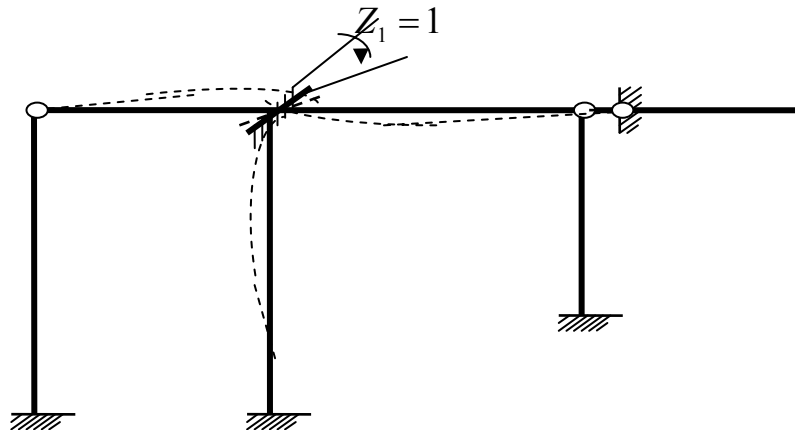


Рис. 3.10

При побудові деформованої схеми рами бажано перш за все зобразити нове положення вузла після повороту, а потім, аналізуючи закріплення на нерухомих кінцях стержнів, з'єднувати найкоротшими кривими зміщені й нерухомі кінці кожного стержня.

На підставі одержаних деформацій для кожного стержня обираємо за табл. 1 додатку цих вказівок і відповідним чином розташовуємо епюри моментів. Так, для стержнів ригеля, що мають один кінець жорсткий, а інший шарнірно закріплений, при повороті жорсткого кінця маємо в табл. 1 додатку перший рядок. Для лівого стержня ригеля відповідно до його деформації розтягнуті верхні волокна й момент на жорсткому кінці необхідно відкласти доверху. Значення цього моменту за табл. 1 додатку буде таким: $M = 3EI_p / l_p$. З урахуванням прийнятого співвідношення жорсткостей і довжини стержня $l_p = 5m$ одержимо $M = 3 \cdot 4EI / 5 = 2,4EI$. Правий стержень ригеля має розтягнуті волокна знизу, отже, момент на його лівому жорсткому кінці ($M = 3EI_p / l'_p = 3 \cdot 4EI / 7 = 1,714EI$) необхідно відкласти вгору.

Для середньої стійки рами, що має обидва жорстких кінці, за табл. 1 додатку при повороті кінця знаходимо епюру й значення моментів у шостому рядку. За деформованою схемою на рис. 3.10 верхня частина стійки має розтягнуті волокна з лівого боку, а нижня – з правого. За значеннями, наведеними в рядку 6 табл. 1 додатку, з урахуванням заданого співвідношення жорсткостей ($EI_c = EI$) і довжини стійки ($l_c = 6m$) одержимо: $M_{верх} = 4EI_c / l_c = 4EI / 6 = 0,667EI$; $M_{нижн} = M_{верх} / 2 = 0,333EI$.

Інші стержні рами, як видно з рис. 3.10, не деформуються. Епюра \bar{M}_1 від зміщення $Z_1 = 1$ наведена на рис. 3.11.

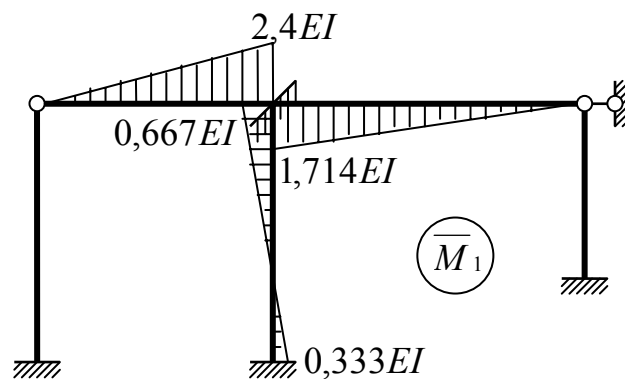


Рис. 3.11

б) Епюра згинаючих моментів від зміщення опорного стержня $Z_2 = 1$ (рис. 3.12). Для побудови деформованої схеми рами, як і при повороті плаваючого затиснення, перш за все показуємо нове положення зміщених вузлів. Оскільки відстань між кінцями стержнів за введеними припущеннями залишається фіксованою, при зміщенні опорного стержня верхній кінець

правого стояка може зміщуватися тільки перпендикулярно його осі, тобто вздовж горизонталі. Це зміщення викликає також зміщення верхніх кінців середнього й правого стояків також перпендикулярно до їхніх осей – уздовж горизонталі, при цьому наявність плаваючого затиснення не дозволяє середньому вузлу ригеля повертатись. Далі, як і при попередньому повороті затиснення, наносимо деформовані осі стержнів (пунктирні лінії на рис. 3.12).

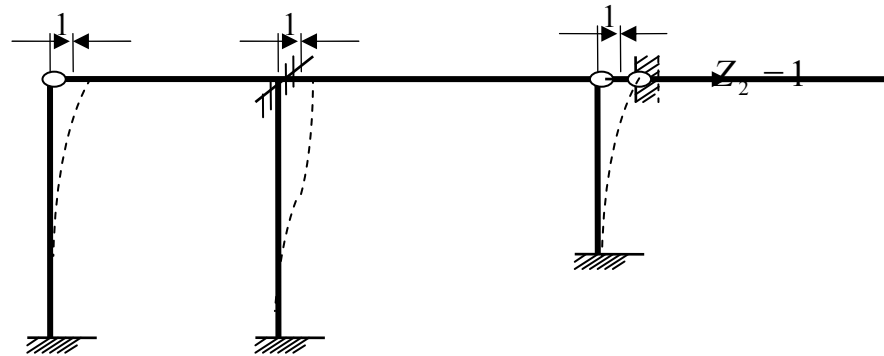


Рис. 3.12

Крайні стояки рами мають один жорсткий і другий – шарнірний кінці. Їхнім деформаціям відповідають епюри, наведені в рядку 2 табл. 1 додатку. За характером згину в цих стояках розтягнутими будуть волокна, розташовані ліворуч від осі, отже моменти на їхніх жорстких (нижніх) кінцях повинні відкладатись вліво й за формулами, наведеними в табл. 1 додатку, мають такі значення: на лівому стояку $M = 3EI_c / l_c^2 = 3EI / 6^2 = 0,0833EI$ на правому - $M = 3EI / 4^2 = 0,1875EI$.

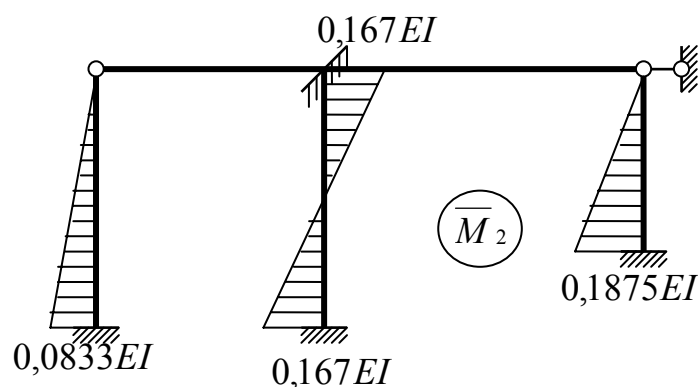


Рис. 3.13

Середній стояк має обидва жорсткі кінці. Його деформації відповідає епюра, наведена в рядку 7 табл. 1 додатку. На верхньому кінці стояка

розтягнуті праві волокна, а на нижньому – ліві. Відповідні значення моментів однакові на обох кінцях і становлять: $M = 6EI_c / l_c^2 = 6EI / 6^2 = 0,167EI$.

Епюра \overline{M}_2 від зміщення $Z_2 = 1$ наведена на рис. 3.13.

в) Епюра згинаючих моментів від заданого навантаження. Ще раз нагадаємо, що в основній системі методу переміщень кожен стержень працює окремо від інших. Отже при заданому навантаженні правий і середній стояки мають нульові епюри. На ригелях рами епюри від заданого розподіленого навантаження беремо з рядка 4 табл. 1 додатку. Значення моментів на жорстких кінцях цих стержнів біля середнього вузла обчислюємо за формулою $M = ql^2 / 8$. Для лівого стержня ця величина становить $12 \cdot 5^2 / 8 = 37,5 \text{ кНм}$, для правого - $12 \cdot 7^2 / 8 = 73,5 \text{ кНм}$. Епюру моментів на лівому стояку будуємо, складаючи епюри від кожної окремої сили, як показано на рис. 3.14.

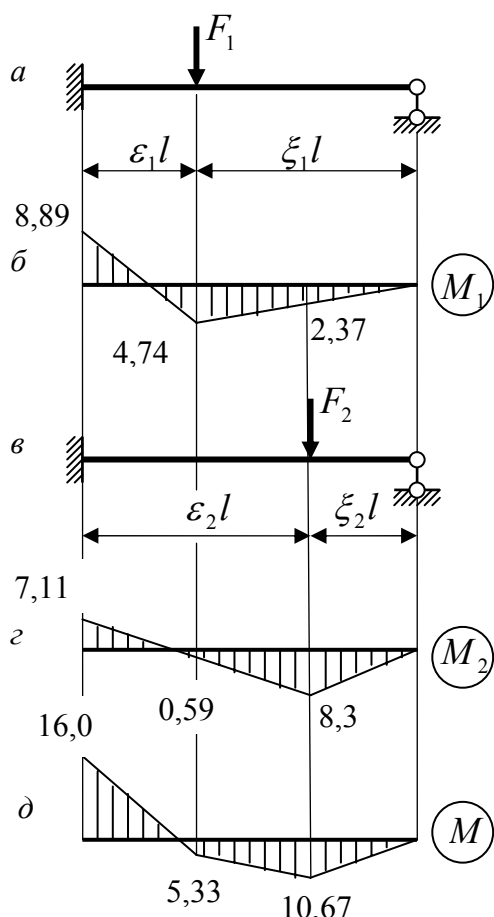


Рис. 3.14

Положення нижньої сили стояка відповідає силі F_1 . Положення сили F_1 визначається відносними відстанями від лівого кінця $\epsilon_1 = 2 : 6 = \frac{1}{3}$ і від правого -

$\xi_1 = 4 : 6 = \frac{2}{3}$. Отже відповідно до

формул, наведених у рядку 3 табл. 1, обчислюємо:

$$M_A = \frac{F_1 l}{2} \xi (1 - \xi^2) = \frac{8 \cdot 6}{2} \cdot \frac{2}{3} \left(1 - \frac{2^2}{3^2} \right) = 8,89;$$

$$R_B = \frac{F_1 \epsilon_1^2}{2} (3 - \epsilon_1) = \frac{8 \cdot \frac{1}{3^2}}{2} \left(3 - \frac{1}{3} \right) = 1,185 \text{ кН};$$

$$M_C = R_B \xi_1 \cdot l = 1,185 \cdot \frac{2}{3} \cdot 6 = 4,74 \text{ кНм};$$

$$M_D = R_B \xi_2 \cdot l = 1,185 \cdot \frac{1}{3} \cdot 6 = 2,37 \text{ кНм}.$$

Епюра M_1 від сили F_1 наведена на рис. 3.14,б.

Положення верхньої сили стояка відповідає силі F_2 на рис. 3.14,в. Для неї $\epsilon_2 = 4 : 6 = \frac{2}{3}$; $\xi_2 = 2 : 6 = \frac{1}{3}$. За тими самими формулами знаходимо:

$$M_A = \frac{F_2 l}{2} \frac{1}{3} \left(1 - \frac{1}{3^2} \right) = \frac{8 \cdot 6 \cdot 8}{54} = 7,111 \text{ кНм};$$

$$R_B = \frac{F_2 \varepsilon_2^2}{2} (3 - \varepsilon_2) = \frac{8 \cdot 2^2}{2 \cdot 3^2} \left(3 - \frac{2}{3} \right) = 4,148 \text{ кН};$$

$$M_D = R_B \xi_2 l = 4,148 \cdot \frac{1}{3} 6 = 8,296 \text{ кНм};$$

$$M_C = \frac{M_D + M_A}{2} = \frac{8,296 - 7,111}{2} = 0,592 \text{ кНм}.$$

Епюра M_2 від сили F_2 наведена на рис. 3.14,з.

Згинаючі моменти від сумісної дії сил F_1 та F_2 одержимо як суму моментів M_1 та M_2 (рис. 3.14,д).

Повна епюра M_f від заданого навантаження наведена на рис. 3.15.

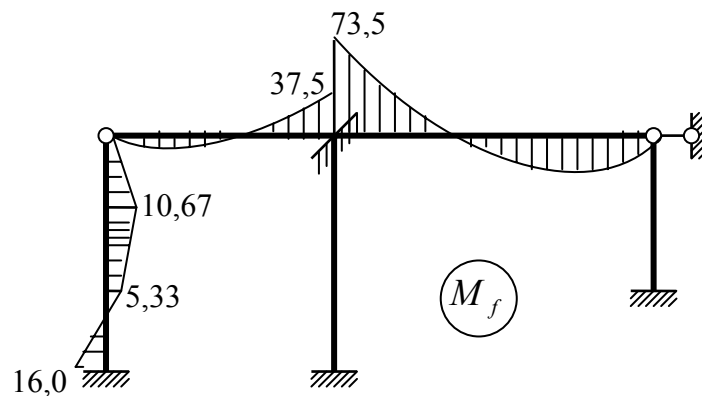


Рис. 3.15

5. Обчислюємо коефіцієнти і вільні члени канонічних рівнянь.

Коефіцієнти r_{11} , r_{12} і вільний член R_{1f} першого канонічного рівняння є реакціями у першій в'язі основної системи, тобто реактивними моментами у плаваючому затисненні. Ці реактивні моменти можна обчислити з умов рівноваги того вузла, в якому знаходиться затиснення. Так, для визначення реакції r_{11} у першій в'язі від зміщення цієї самої першої в'язі вирізуємо перший вузол на першій одиничній епюрі (рис. 3.16,а). З рівняння рівноваги $\sum M = r_{11} - 2,4EI - 1,714EI - 0,667EI = 0$ одержимо $r_{11} = (2,4 + 1,714 + 0,667)EI$.

Отже $r_{11} = 4,781EI$.

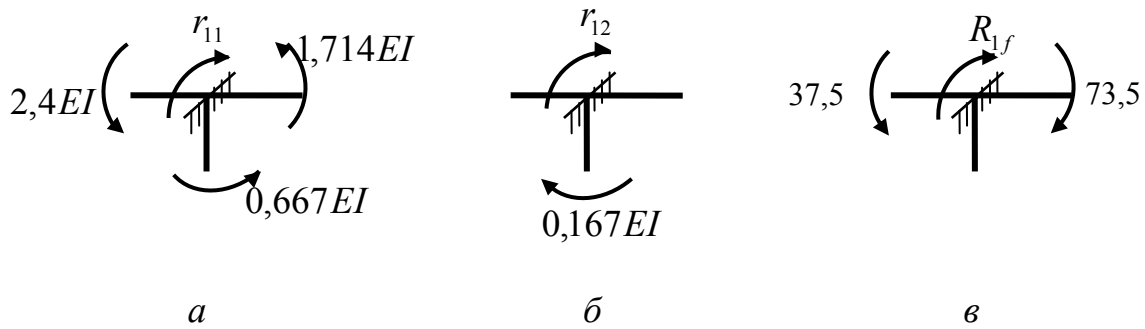


Рис. 3.16

Аналогічно, для визначення реакції r_{12} у першій в'язі від зміщення другої в'язі визначаємо з рівноваги першого вузла на другій епюрі (рис. 3.16,б):

$$\sum M = r_{12} + 0,167EI = 0; \quad r_{12} = -0,167EI.$$

Реакція R_{1f} у першій в'язі від заданого навантаження визначається з рівноваги першого вузла на епюрі M_f (рис. 3.16,в):

$$\sum M = R_{1f} + 73,5 - 37,5 = 0; \quad R_{1f} = 37,5 - 73,5 = -36 \text{ кНм}.$$

Коефіцієнтами r_{21} , r_{22} і вільним членом R_{2f} є реакції у додатковому опорному стержні основної системи. Для їхнього визначення можна розглянути рівновагу ригеля, що втримується від горизонтального зміщення цим опорним стержнем.

Розглянемо рівновагу ригеля на першій одиничній епюрі (рис. 3.17,а). Необхідно врахувати всі сили, що мають проекцію на вісь опорного стержня: У даному випадку це буде поперечна сила в середньому стояку -

$$Q = \frac{-0,667EI - 0,333EI}{6} = -0,167EI. \quad \text{Зауважимо, що тут поперечна сила}$$

визначена через згинаючі моменти на кінцях стержня, інакше її можна знайти через значення реакції стержня у відповідному рядку табл. 1 додатку: $R = \frac{6EI}{l^2}$.

Ця реакція намагається повернути стояк проти годинникової стрілки. Про те саме свідчить і знак поперечної сили, обчисленої за епюрою моментів.

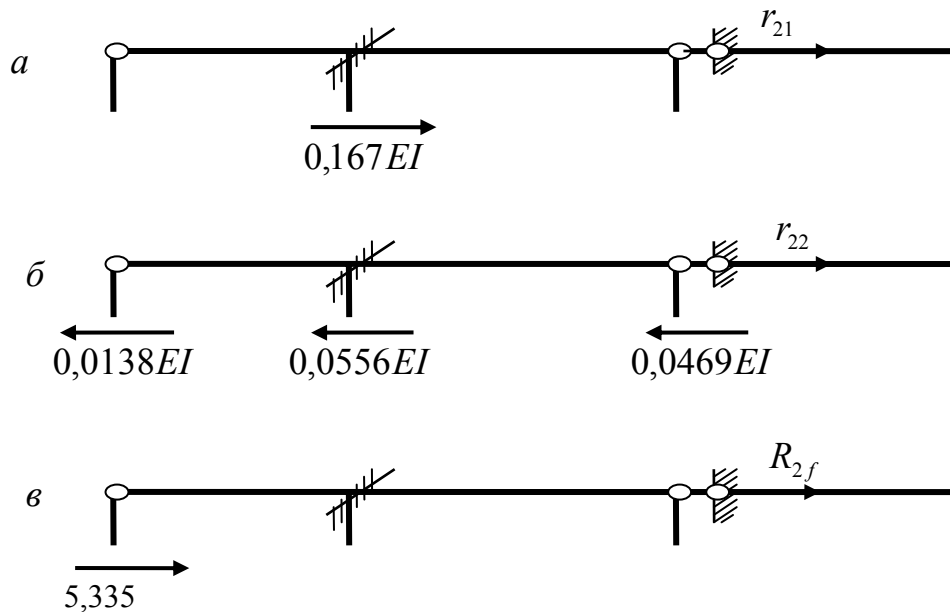


Рис. 3.17

Проектуючи сили на вісь опорного стержня (горизонталь), одержимо:

$$\sum x = r_{21} + 0,167EI = 0,$$

звідки $r_{21} = -0,167EI$.

Нагадаємо, що для одиничних реакцій дійсною є теорема про взаємність: $r_{ik} = r_{ki}$. При розрахунках методом переміщень ця теорема звичайно використовується для перевірки реакцій. У нашому випадку ця властивість виконана: $r_{21} = r_{12} = -0,167EI$.

Далі вирізуємо ригель на епюрі \overline{M}_2 (рис. 3.17,б). Як і в першому разі, визначаємо поперечні сили через згинаючі моменти реакції або як реакції стержнів, наведені в табл. 1 додатку. Так, на лівому стояку за епюрою \overline{M}_2

маємо $Q = \frac{0,0833}{6} = 0,0138EI$, на середньому -

$Q = \frac{0,167EI + 0,167EI}{6} = 0,0556EI$ та на правому - $Q = \frac{0,1875EI}{4} = 0,0469EI$.

Далі з умови рівноваги ригеля $\sum x = r_{22} - 0,0138EI - 0,0556EI - 0,0469EI = 0$ одержимо $r_{22} = 0,1163EI$.

І, нарешті, розглядаємо рівновагу ригеля під дією навантаження (рис. 17,в). Поперечна сила виникає лише на лівому стояку (інші стояки не мають навантаження) і дорівнює $Q = \frac{0 - 10,67}{2} = -5,335\text{кН}$.

6. *Розв'язуємо систему рівнянь.* Підставляючи одержані реакції в канонічні рівняння одержимо таку систему:

$$\begin{aligned} 4,781EI \cdot Z_1 - 0,167EI \cdot Z_2 - 36 &= 0; \\ -0,167EI \cdot Z_1 + 0,1163EI \cdot Z_2 - 5,34 &= 0. \end{aligned}$$

Для розв'язання цієї системи можна застосувати будь-який відомий спосіб. У результаті одержуємо: $Z_1 = \frac{9,62}{EI}$; $Z_2 = \frac{59,63}{EI}$.

При ручному розрахунку бажано перевірити правильність розрахунку підстановкою одержаних невідомих у вихідні рівняння.

7. *Побудова остаточної епюри згинаючих моментів.* Для цього використовуємо принцип суперпозиції: $M = \overline{M}_1 \cdot Z_1 + \overline{M}_2 \cdot Z_2 + M_f$. «Виправлені» епюри $M_1 = \overline{M}_1 \cdot Z_1$ та $M_2 = \overline{M}_2 \cdot Z_2$ одержуємо відповідно множенням першої одиничної епюри на значення Z_1 та другої – на Z_2 (рис. 3.18,а,б).

Далі підсумовуємо значення моментів у відповідних перерізах кожної виправленої та вантажної епюр, наприклад, згинаючий момент у верхньому перерізі середнього стояка буде таким: $M = -6,41 + 9,94 = 3,53 \text{ кНм}$, у правому перерізі лівого ригеля: $M = -23,09 + 0 - 37,5 = -60,59 \text{ кНм}$; у лівому перерізі правого ригеля: $M = 16,49 + 0 - 73,5 = -57,01 \text{ кНм}$. Епюра моментів, що відповідає заданій рамі наведена на рис. 3.18,в. Зауважимо, що значення моментів у серединах ділянок із розподіленим навантаженням можна визначити так само підсумовуванням відповідних моментів на виправлених та вантажній епюрах. Інакше їх можна одержати на підставі виразу

$M_{\text{сер}} = \frac{M_{\text{прав}} + M_{\text{лів}}}{2} + \frac{ql^2}{8}$. Нагадаємо, що значення моментів слід брати з урахуванням знаків, а знак перед другим доданком відповідає навантаженню, спрямованому донизу. Так, наприклад, для середнього перерізу правого ригеля маємо:

$$M_{\text{сер}} = \frac{0 - (-57,01)}{2} + \frac{12 \cdot 7^2}{8} = 44,54 \text{ кНм}$$

8. *Побудова епюри поперечних сил.* Поперечні сили зручно обчислювати через згинаючі моменти. Для загального випадку дії на ділянці рівномірно розподіленого навантаження маємо:

$$Q_{\text{лів}}^{\text{прав}} = \frac{M_{\text{прав}} - M_{\text{лів}}}{l} \pm \frac{ql}{2}.$$

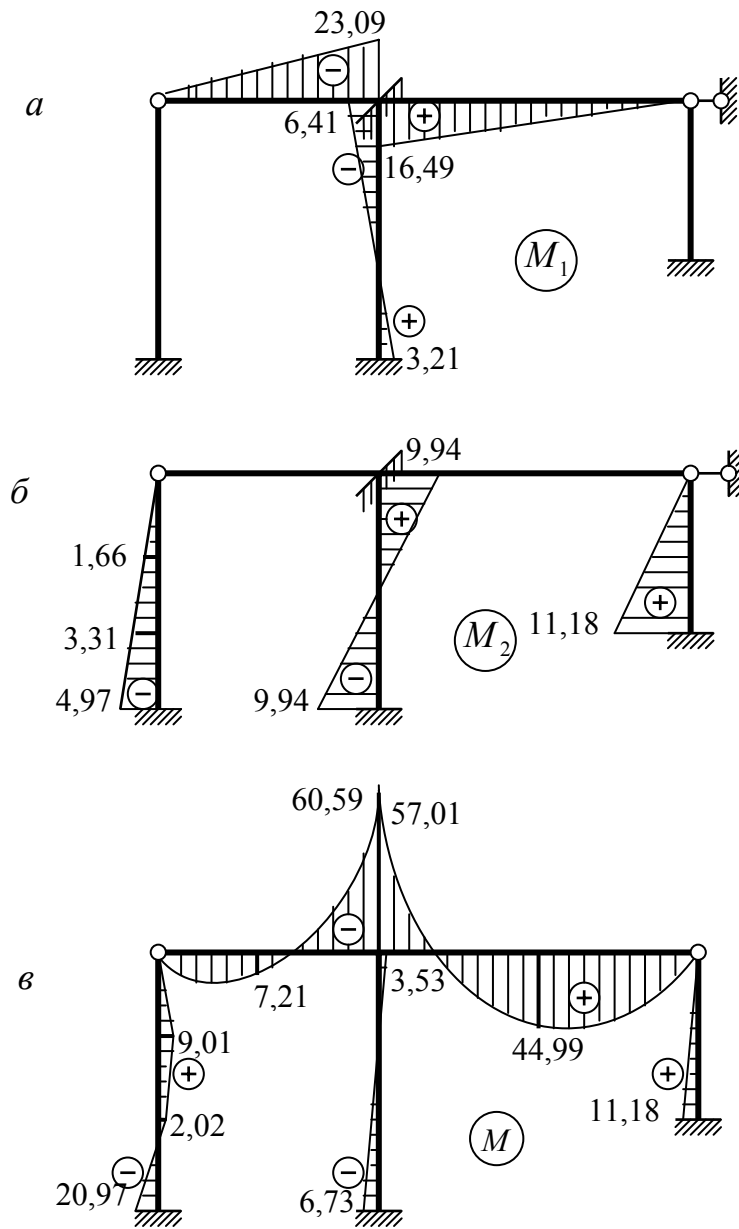


Рис. 3.18

На лівому стояку маємо три ділянки навантаження, на кожній із них, починаючи знизу одержуємо:

$$Q_n = \frac{2,02 - (-20,97)}{2} = 11,5 \text{ кН} ;$$

$$Q_c = \frac{9,01 - 2,02}{2} = 3,5 \text{ кН} ;$$

$$Q_v = \frac{0 - 9,01}{2} = -4,5 \text{ кН} .$$

На лівому ригелі:

$$Q_{\text{лів}}^{\text{прав}} = \frac{-60,59 - 0}{5} \pm \frac{12 \cdot 5}{2} = -12,12 \pm 30 = \begin{cases} 17,88 \text{ кН}; \\ -42,12 \text{ кН}. \end{cases}$$

На правому ригелі:

$$Q_{\text{лів}}^{\text{прав}} = \frac{0 + 57,01}{7} \pm \frac{12 \cdot 7}{2} = 8,28 \pm 42 = \begin{cases} 50,28 \text{ кН}; \\ -33,72 \text{ кН}. \end{cases}$$

На середньому стояку:

$$Q = \frac{3,53 - (-6,73)}{6} = 1,71 \text{ кН}.$$

І, нарешті, на правому стояку:

$$Q = \frac{0 - 11,18}{4} = -2,8 \text{ кН}.$$

Епюра Q наведена на рис. 3.19.

9. Побудова епюри поздовжніх сил. Поздовжні сили визначаємо з рівноваги вузлів рами з урахуванням поперечних сил.

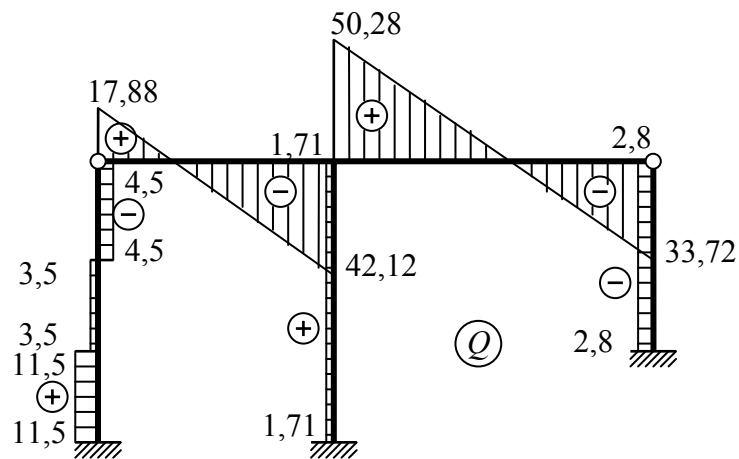


Рис. 3.19

Починаємо з будь-якого двостержневого вузла, наприклад, з лівого вузла ригеля (рис. 3.20,а). Записуючи умови рівноваги, одержимо:

$$\sum y = -17,88 - N_1 = 0, \text{ звідки } N_1 = -17,88 \text{ кН};$$

$$\sum x = 4,5 + N_2 = 0, \text{ звідки } N_2 = -4,5 \text{ кН}.$$

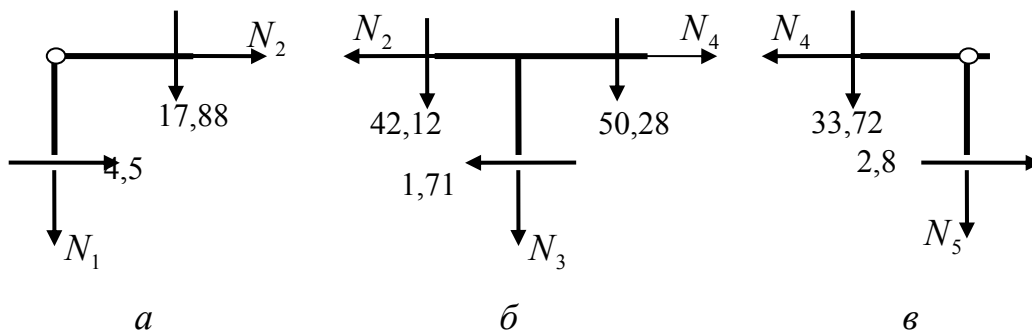


Рис. 3.20

Далі розглянемо рівновагу середнього вузла ригеля (рис. 3.20,б):

$$\sum y = -42,12 - 50,28 - N_3 = 0, \text{ звідки } N_3 = -42,12 - 50,28 = -92,4 \text{ кН};$$

$$\sum x = -N_2 - 1,71 + N_4 = 0, \text{ звідки } N_4 = 4,5 - 1,71 = 2,79 \text{ кН}.$$

Нагадаємо, що поздовжня сила вздовж стержня не змінюється, якщо навантаження на цьому стержні перпендикулярне до його осі, тобто не дає проекцію на цю вісь.

Умови рівноваги останнього – правого – вузла ригеля (рис. 3.20,в) дають:

$$\sum y = -33,72 - N_5 = 0, \text{ звідки } N_5 = -33,72 \text{ кН};$$

$$\sum x = 2,8 - N_4 = 2,8 - 2,79 = 0,01 \text{ кН} \approx 0.$$

Останнє рівняння є перевіркою умови рівноваги ригеля вздовж горизонталі.

Епюра поздовжніх сил наведена на рис. 3.21.

10. *Перевірка розрахунків.* Перевірка розрахунків у методі переміщень виконується шляхом перевірки тих умов рівноваги, які використовувались для визначення реакцій у добавлених в'язях основної системи.

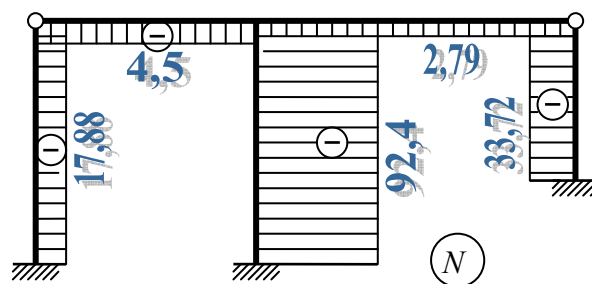
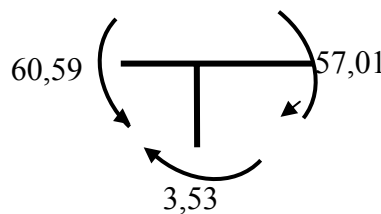


Рис. 3.21

Розглянемо рівновагу середнього вузла ригеля під дією згинаючих моментів (рис. 3.22).



$$\sum M = 60,59 - 57,01 - 3,53 = 0,04 \approx 0$$

Рис. 3.22

Вузол знаходиться в рівновазі.

Рівновага ригеля була перевірена при визначенні поздовжніх сил. Отже, статичні рівняння задовольняються, розрахунок виконано правильно.

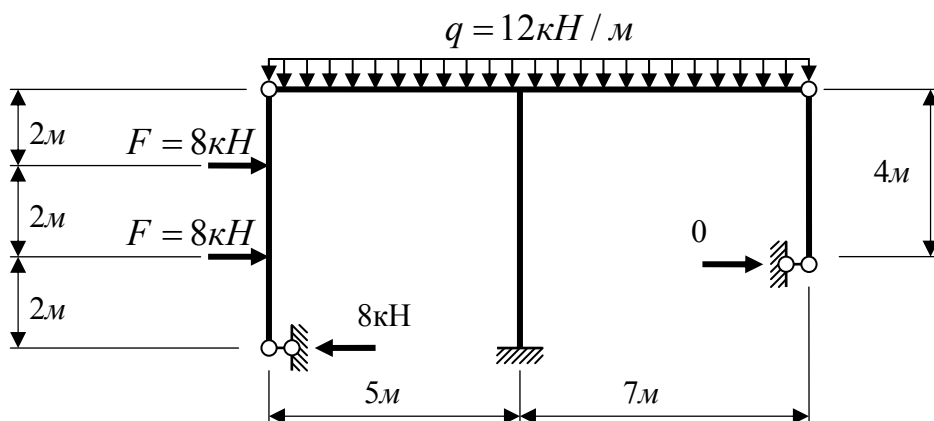


Рис. 3.23

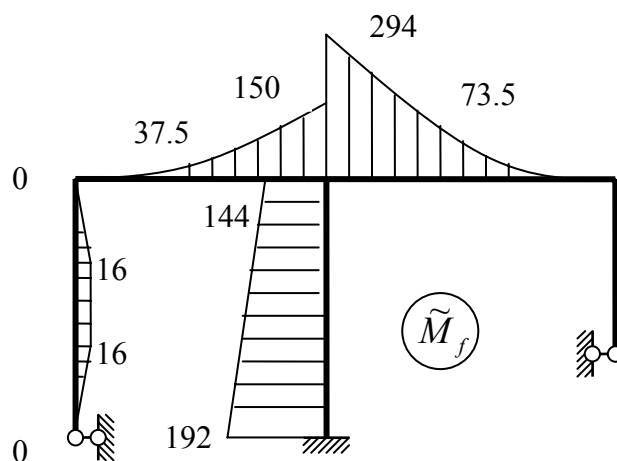


Рис. 3.24

11. Підбір перерізу стержнів. З умови міцності $W \geq \frac{M_{\max}}{[\sigma]}$ знаходимо:

для стояків $W \geq \frac{14,75 \cdot 100}{16} = 92,2 \text{ см}^3$; за сортаментом обираємо двотавр

№ 16 з $W = 109 \text{ см}^3 > 92,2 \text{ см}^3$ та $I = 873 \text{ см}^4$.

для ригеля $W \geq \frac{60,59 \cdot 100}{16} = 379 \text{ см}^3$; за сортаментом обираємо двотавр

№ 27а з $W = 371 \text{ см}^3$, так, як $\left| \frac{379 - 371}{379} \right| \cdot 100\% = 2\% < 5\%$ та $I = 3800 \text{ см}^4$;

При розрахунках прийнято $[\sigma] = 160 \text{ МПа} = 16 \text{ кГ / см}^2$.

Перевіряємо прийняте спочатку розрахунків співвідношення моментів інерції стержнів (жорсткостей): $EI_p : EI_c = I_p : I_c = 3800 : 873 = 4,35$. Це

відношення незначно відрізняється від прийнятого на початку -

$\left| \frac{4,35 - 4}{4,35} \right| \cdot 100\% = 8,8\% < 25\%$. Якщо відхилення співвідношення жорсткостей

перевищує 25% необхідно виконати перерахунок, задаючись новим відношенням жорсткостей ригеля та стояка.

Приклад 4. Побудувати епюри внутрішніх зусиль у рамі, наведеній на рис. 3.25 при заданих жорсткостях стержнів.

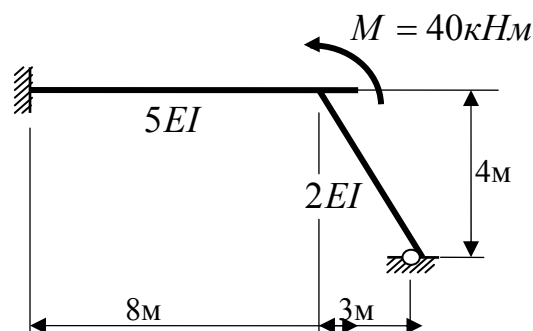


Рис. 3.25

Розв'язання.

1. Ступінь кінематичної невизначності становить один (один жорсткий вузол, у шарнірно-стержневій схемі на рис. 3.26,а лінійні зміщення відсутні).

2. Основна система рами наведена на рис. 3.26,б.

3. Канонічне рівняння:

$$r_{11} \cdot Z_1 + R_{1f} = 0.$$

4. Епюри згинаючих моментів в основній системі:

а) від одиничного зміщення першої в'язі (повороту плаваючого затиснення). Деформована схема основної системи наведена на рис. 3.25,а, відповідна епюра – на рис. 3.25.б.

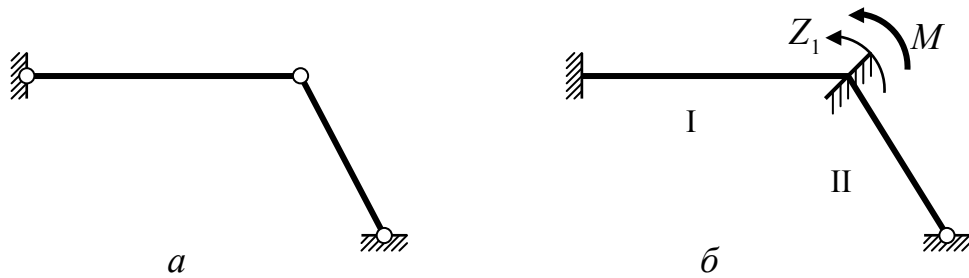


Рис.26

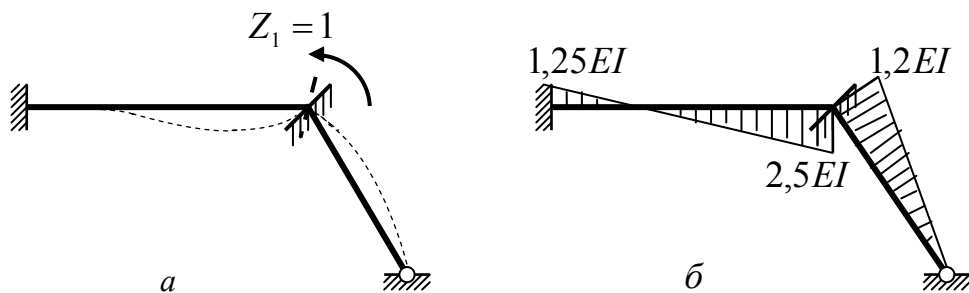


Рис. 3.27

Зауважимо, що при визначенні згинаючого моменту на стояку враховано його довжину $l = \sqrt{4^2 + 3^2} = 5\text{ м}$;

б) від заданого навантаження моменти в основній системі відсутні, оскільки заданий момент діє у вузлі, тобто в напрямку поставленої в'язі – плаваючого затиснення.

5. Коефіцієнт та вільний член канонічного рівняння являють собою реакції в плаваючому затисненні. Їх визначаємо з умов рівноваги вузла (рис. 3.28):

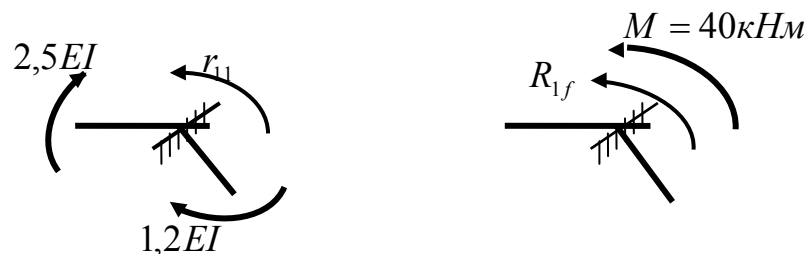


Рис. 3.28

$$r_{11} = 2,5EI + 1,2EI = 3,7EI ; R_{1f} = -40\text{ кНм} .$$

6. Розв'язання канонічного рівняння:

$$Z_1 = -\frac{R_{1f}}{r_{11}} = -\frac{-40}{3,7EI} = \frac{10,81}{EI} .$$

7. Побудова епюри згинаючих моментів для заданої рами.

Оскільки епюра M_f від заданого навантаження відсутня, моменти для заданої рами визначається множенням одиничної епюри на обчислене переміщення Z_1 (рис. 3.29,а).

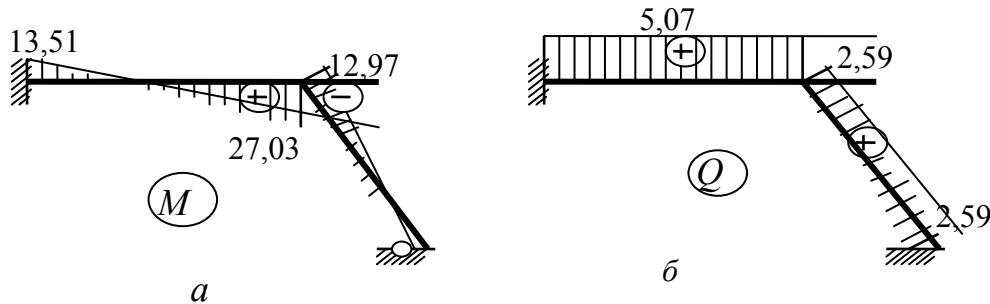


Рис. 3.29

8. Побудова епюри поперечних сил (рис. 29,б):

$$Q_{\text{пиз}} = \frac{27,03 + 13,51}{8} = 5,07 \text{ кН}; \quad Q_{\text{ст}} = \frac{0 + 12,97}{5} = 2,59 \text{ кН}.$$

9. Поздовжні сили визначаємо з умов рівноваги вузла під дією поперечних та поздовжніх сил (рис. 3.30,а):

$$\sum x = -N_p - 2,59 \cdot \sin \alpha = 0; \quad N_p = -2,59 \cdot 0,8 = -2,06 \text{ кН};$$

$$\sum y = 5,07 - 2,59 \cdot \cos \alpha - N_c \sin \alpha = 0; \quad N_c = \frac{5,07 - 2,59 \cdot 0,6}{0,8} = 4,4 \text{ кН}.$$

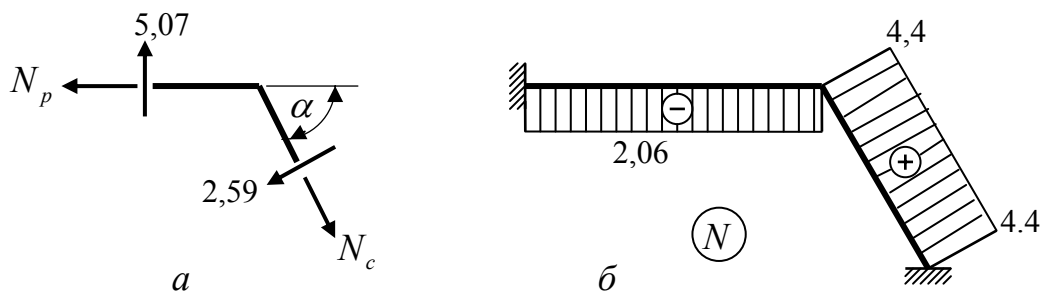


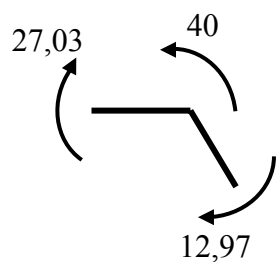
Рис. 3.30

Тригонометричні функції кута нахилу стояка визначено через його довжину та проекції на горизонтальну та вертикальну осі:

$$\sin \alpha = \frac{y_c}{l_c} = \frac{4}{5} = 0,8; \quad \cos \alpha = \frac{x_c}{l_c} = \frac{3}{5} = 0,6.$$

Епюра поздовжніх сил наведена на рис. 3.30,б.

10. Перевірку розрахунків виконуємо з умови рівноваги вузла рами на епюрі згинаючих моментів (рис. 3.31).



$$\sum M = 40 - 27,03 - 12,97 = 0$$

Рис. 3.31

Розрахунок виконано вірно.

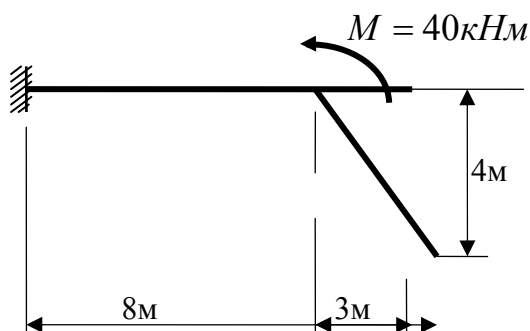
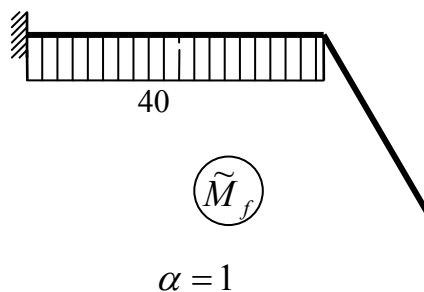


Рис. 3.32



$$\alpha = 1$$

Приклад 5. Побудувати епюру згинаючих моментів для рами, наведеної на рис. 3.34,а.

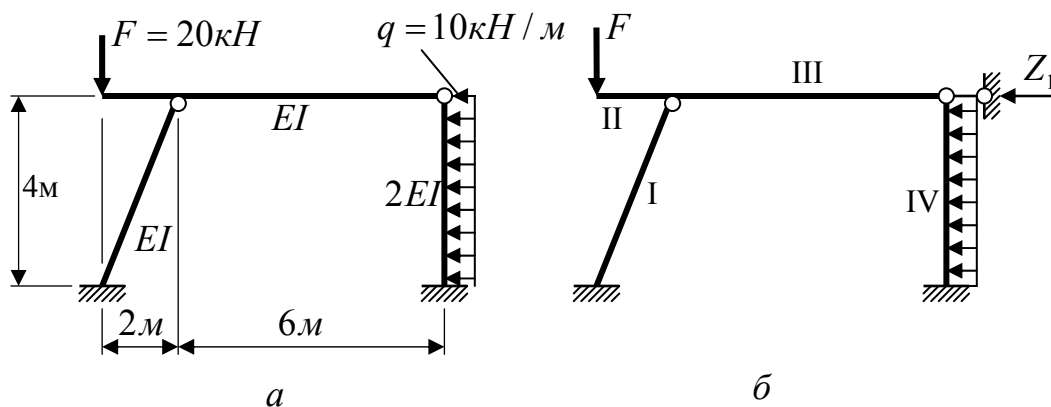


Рис. 3.34

Розв'язання.

1. Ступінь кінематичної невизначності рами становить один – одне лінійне зміщення вузлів ригеля.
2. Обираючи основну систему ставимо горизонтальний опорний стержень у правому вузлі ригеля (рис. 3.34,б).
3. Канонічне рівняння:

$$r_{11} \cdot Z_1 + R_{1f} = 0.$$

4. Епюра згинаючих моментів в основній системі від одиничного зміщення доданого опорного стержня. Деформована схема рами наведена на рис. 3.35,а.

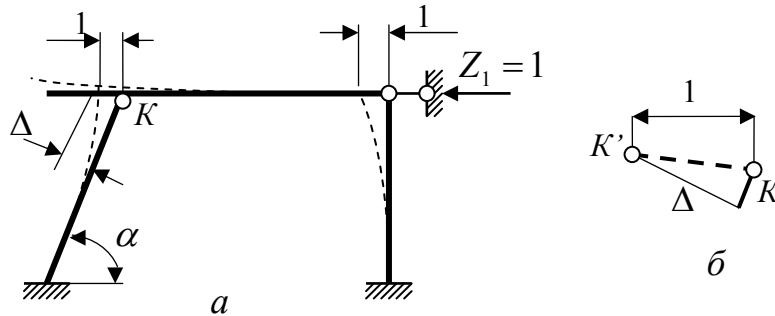


Рис. 3.35

Як бачимо, горизонтальне зміщення в'язі таке саме як горизонтальне одиничне переміщення верхнього кінця правого стояка. Переміщення лівого стояка тепер не буде горизонтальним, а здійснюється перпендикулярно до осі стержня. Складову переміщення Δ у напрямку перпендикуляра до осі визначимо з умови, що горизонтальна складова переміщення становить 1 (рис. 3.35,б):

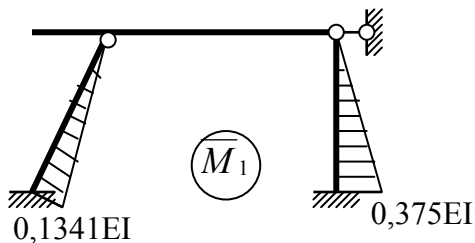


Рис. 3.36

$$\Delta = 1 \cdot \sin \alpha = 0,894;$$

$$\sin \alpha = \frac{y_c}{l_c} = \frac{4}{\sqrt{4^2 + 2^2}} = 0,894.$$

Значення моментів від одиничного зміщення кінця стояків обчислюємо за формулою рядка 2 табл. 1

додатку: $M = \frac{3EI}{l^2}$. Для правого стояка

$$\text{маємо: } M = \frac{3 \cdot 2EI}{4^2} = 0,375EI;$$

$$\text{для лівого: } M = \frac{3EI}{l^2} \cdot \Delta = \frac{3EI}{(\sqrt{4^2 + 2^2})^2} \cdot 0,894 = 0,1341EI.$$

Епюра \overline{M}_1 наведена на рис. 3.36.

При побудові епюри згинаючих моментів від заданого навантаження (рис. 3.37,а) звертаємо увагу на те, що ригель рами являє собою балку на двох опорах з консоллю (рис. 3.37,б).

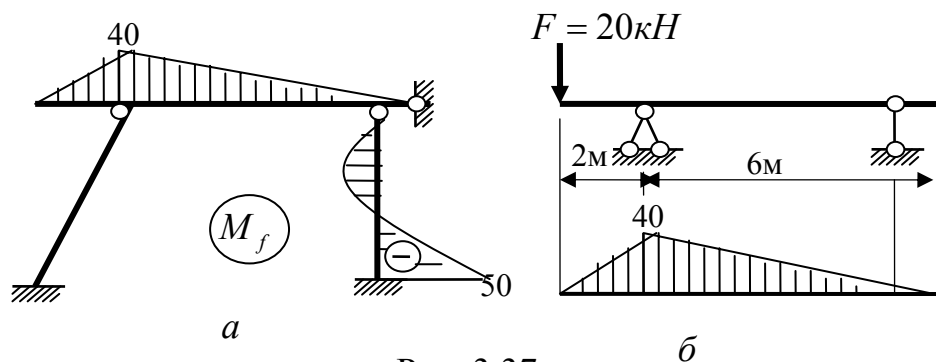


Рис. 3.37

5. Коефіцієнт та вільний член канонічного рівняння визначаємо з умов рівноваги вузлів ригеля (рис. 3.38).

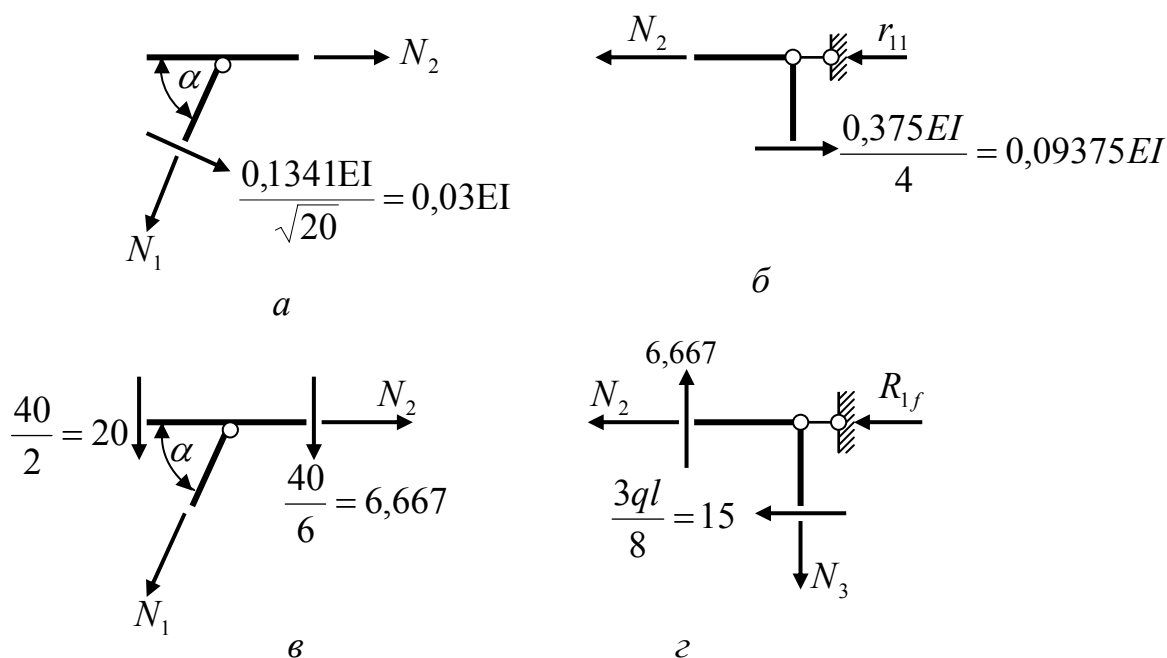


Рис. 3.38

Вирізаючи лівий вузол на епюрі \overline{M}_1 (рис. 3.38,а), одержуємо:

$$\sum y = 0,03EI \cos \alpha - N_1 \sin \alpha = 0; \quad N_1 = \frac{0,03EI \cdot 0,447}{0,894} = 0,015EI$$

$$(\cos \alpha = \frac{2}{\sqrt{20}} = 0,447);$$

$$\sum x = -N_1 \cos \alpha + 0,0375EI \sin \alpha + N_2 = 0;$$

$$N_2 = 0,015EI \cdot 0,447 - 0,0375EI \cdot 0,894 = -0,0268EI.$$

Далі з умови рівноваги правого вузла ригеля (рис. 3.38,б) ($\sum x = 0$) $-r_{11} - N_2 + 0,09375EI = 0$ одержимо: $r_{11} = 0,09375EI + 0,02682EI = 0,1205EI$.

Для визначення вантажної реакції спочатку розглянемо рівновагу лівого вузла на епюрі M_f (рис. 3.38,в):

$$\sum y = -20 - 6,667 - N_1 \sin \alpha = 0; N_1 = \frac{-26,667}{0,894} = -29,83 \text{ кН};$$

$$\sum x = N_2 - N_1 \cos \alpha = 0; N_2 = -29,83 \cdot 0,447 = -13,33 \text{ кН}.$$

Тепер з умови рівноваги правого вузла (рис. 3.38,г) одержимо:

$$\sum x = -R_{1f} - N_2 - 15 = 0; R_{1f} = -15 + 13,33 = -1,67 \text{ кН}.$$

6. Розв'язуючи канонічне рівняння одержимо:

$$Z_1 = -\frac{R_{1f}}{r_{11}} = \frac{1,67}{0,1205EI} = \frac{13,83}{EI}.$$

7. Виправлена епюра згинаючих моментів наведена на рис. 3.38,а, а кінцева епюра – на рис. 3.39,б.

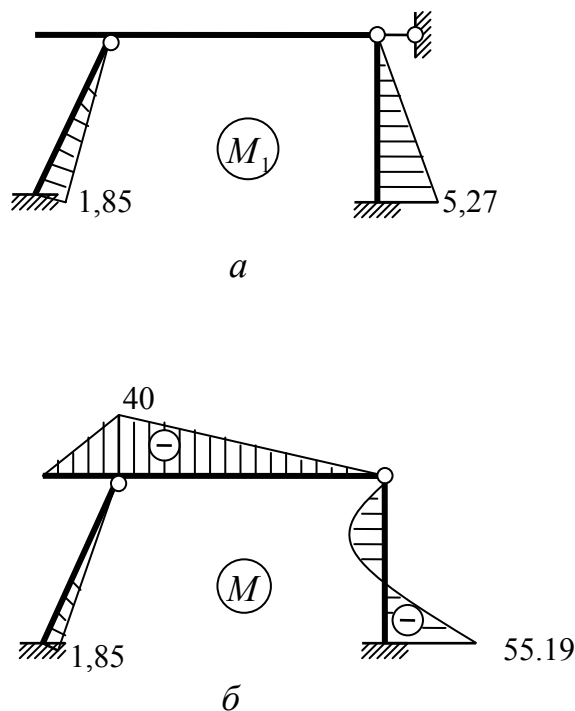


Рис. 3.39

Перевірку розрахунку необхідно виконати як перевірку рівноваги вузлів під дією поперечних та поздовжніх сил.

Приклад 6. Обрати основну систему методу переміщень для симетричної рами, наведеної на рис. 3.40, у передбаченні симетричного та косиметричного навантаження.

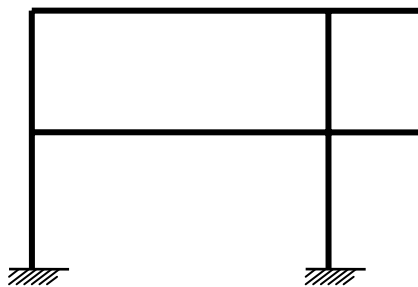


Рис. 3.40

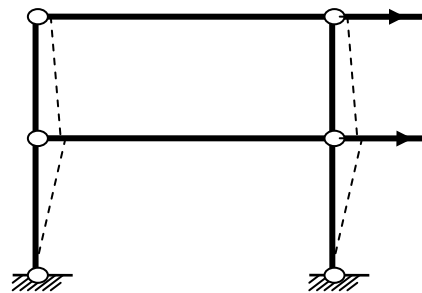


Рис. 3.41

Розв'язання.

1. Ступінь кінематичної невизначності визначаємо незалежно від виду навантаження: кількість кутових зміщень вузлів n_y дорівнює 4; кількість лінійних зміщень $n_{\text{л}} = 2$ (див. рис. 3.41). Отже, $n = 6$.

2. Обираючи основну систему необхідно поставити чотири плаваючих затиснення та два опорних стержня.

При симетричному навантаженні деформації рами симетричні, отже, повороти вузлів кожного ригеля будуть однакові, а лінійні зміщення відсутні. Застосовуючи групові невідомі одержимо основну систему, наведену на рис. 3.42. Тобто кількість невідомих при симетричному навантаженні становить 2.

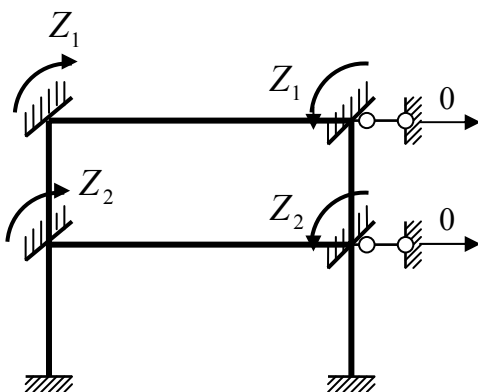


Рис. 3.42

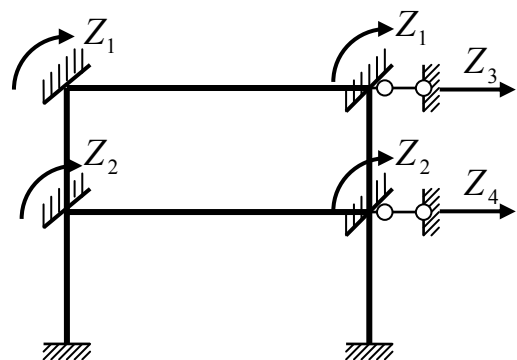


Рис. 3.43

При косиметричному навантаженні деформації косиметричні, отже, повороти вузлів кожного ригеля також однакові за величиною, але тепер вони спрямовані в одну сторону. Отже ці повороти Z_1 та Z_2 є груповими

невідомими, а лінійні зміщення Z_3 та Z_4 вже не будуть нульовими (рис. 3.43). Загальна кількість невідомих переміщень у заданій рамі при кососиметричному навантаженні дорівнює 4.

Зауваження 1. При побудові епюр згинаючих моментів від одночасного повороту кінців стержня слід користуватися принципом суперпозиції. Такі епюри при симетричному повороті наведені на рис. 3.44, а при кососиметричному – на рис. 3.45.

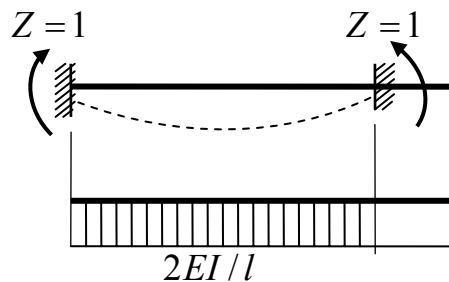


Рис. 3.44

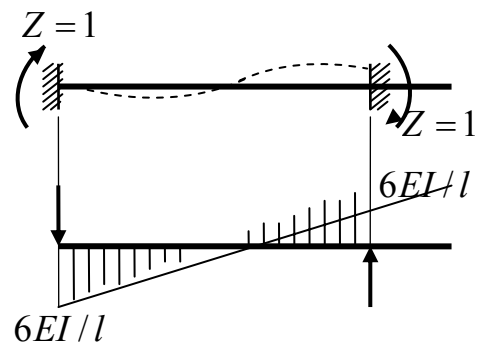


Рис. 3.45

Зауваження 2. При визначенні реакції в груповому затисненні слід урахувувати, що реакція, визначена з рівноваги одного із групових вузлів, повинна подвоюватися для одержання повної реакції.

4. ВИХІДНІ ДАНІ Й ЗАВДАННЯ ДО РОБОТИ

Роботу виконують у строгій відповідності з особистим навчальним шифром студента, по якому з таблиці вибирають вихідні дані та схему рами. Роботи, виконані не за шифром, а також не відповідно до вихідних даних, не зараховуються і повертаються без розгляду.

Роботу рекомендується подати на рецензію одразу після виконання для того, щоб до екзаменаційної сесії можна було врахувати зауваження рецензента і внести виправлення.

Роботу виконують на аркуші формату А1 (584 x 840 мм) із розміщенням на ньому всіх креслень та необхідних розрахунків або в зошиті в клітинку.

Перед початком вирішення задачі необхідно накреслити схему рами й вказати на ній всі розміри й навантаження.

Вирішення задачі супроводжують стислими послідовними поясненнями, чіткими схемами, на яких вказують усі величини в числах, що входять в розрахунок.

На епюрах проставляють значення усіх характерних ординат. При розрахунках не слід підраховувати велику кількість значущих цифр.

Одержавши зауваження на контрольну роботу, студент повинен виправити вказані викладачем помилки, зробити потрібні доповнення, навіть якщо робота має залік. Якщо робота не залікована, необхідно внести виправлення на тому ж або на окремому кресленні і знову подати роботу для повторного розгляду.

Самостійність при виконанні розрахунково-проектувальної роботи має першорядне значення для засвоєння програмного матеріалу. Докладні вказівки до виконання та оформлення контрольного завдання наведені нижче.

Завдання: Схему рами обирають за рис. 4.1, числові дані - за табл. 4.1.

Із таблиці беруть тільки ті дані навантаження, які показані на розрахунковій схемі.

Для заданої рами необхідно:

- з'ясувати ступінь статичної невизначеності;
- вибір основної системи;
- записати канонічні рівняння методу сил;
- побудувати одиничні й вантажні епюри моментів для основної системи;
- обчислювати одиничні й вантажні переміщення;
- розв'язати системи рівнянь;
- побудувати епюри внутрішніх зусиль;
- виконувати статичну і кінематичну перевірку отриманого рішення.

Таблиця 4.1 – Вихідні дані до завдання.

Перша цифра шифру	l , м	h , м	Друга цифра шифру	F_1 , кН	q , кН/м	Третя цифра шифру	Номер схеми	F_2 , кН
1	4	6	1	20	10	1	1	30
2	5	4	2	10	20	2	2	20
3	6	5	3	30	5	3	3	40
4	6	6	4	5	10	4	4	20
5	8	6	5	20	10	5	5	30
6	5	8	6	10	20	6	6	40
7	6	6	7	10	5	7	7	30
8	4	6	8	20	10	8	8	10
9	6	4	9	30	5	9	9	40
0	5	5	0	20	10	0	10	30

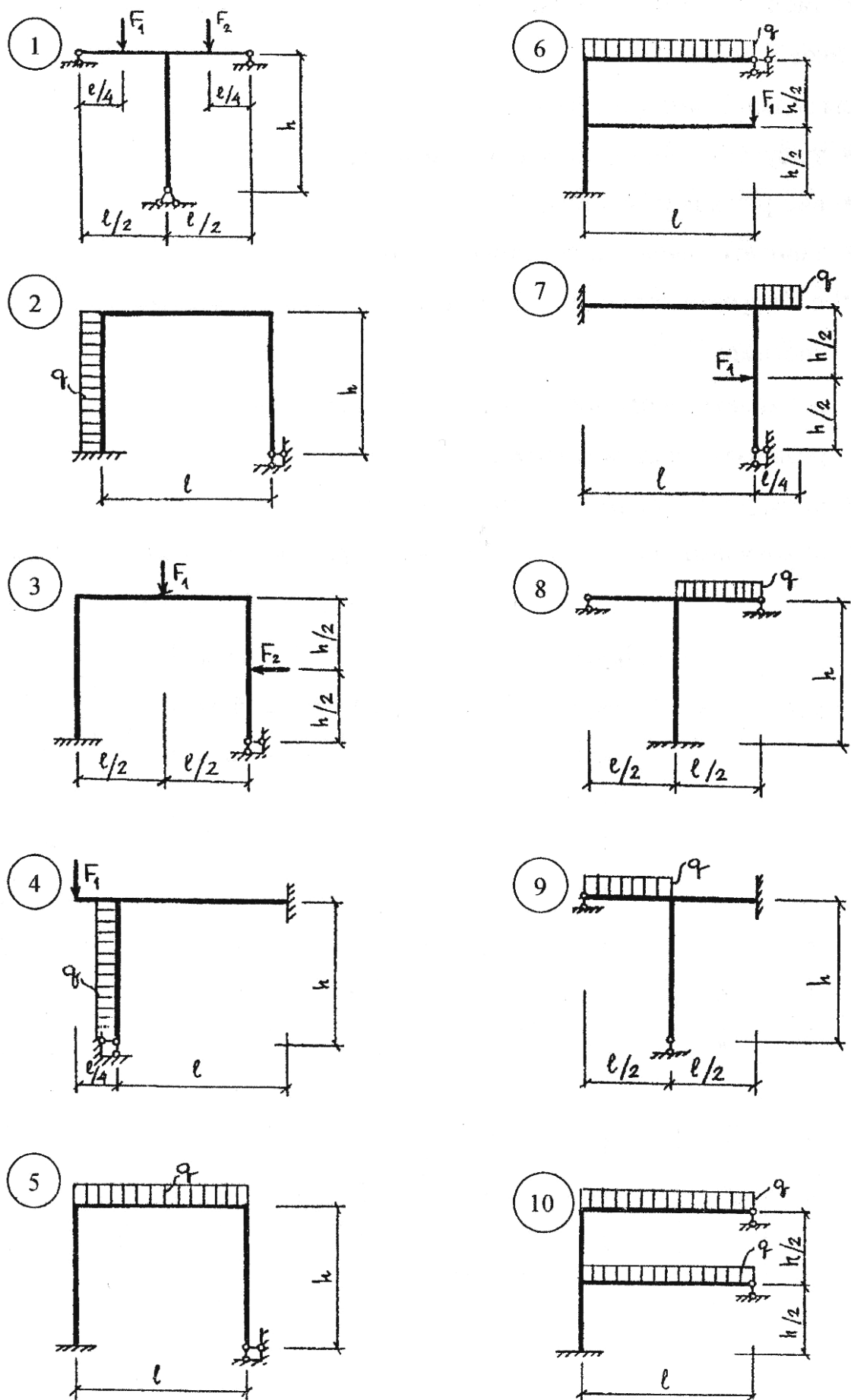


Рис. 4.1

5. ПРИКЛАД РОЗРАХУНКУ

Розрахувати методом сил раму, наведену на рис. 5.1, а.

Розв'язання.

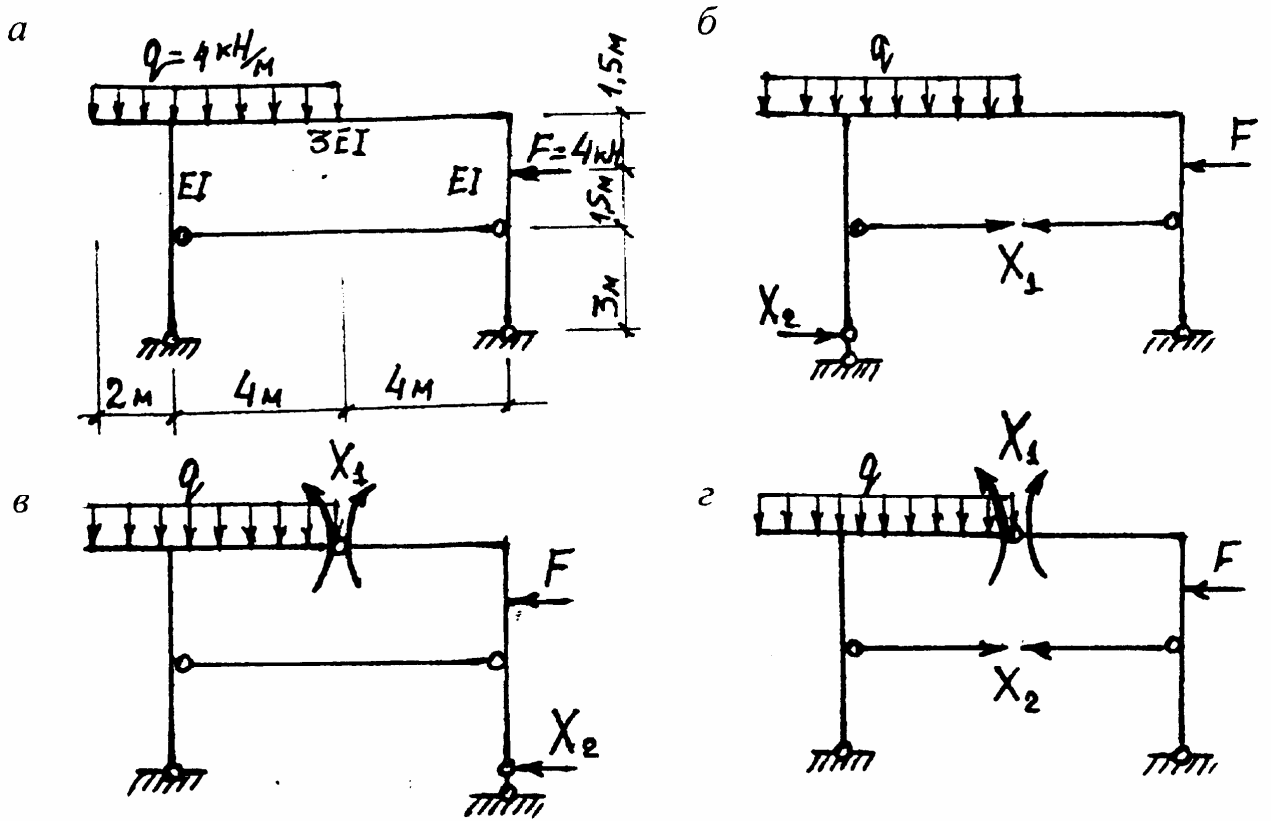


Рис. 5.1

Ступінь статичної невизначеності знаходимо за (2.1):

$$n = 3K - \text{III} + C_0 - 3 = 3 \cdot 1 - 2 + 4 - 3 = 2.$$

Рама двічі статично невизначна (має дві зайві в'язі).

Вибір основної системи в цьому прикладі виконуємо, порівнюючи три варіанти (рис. 5.1, б, в, г), що принципово відрізняються один від одного. При відкиданні зайвих в'язей ($n=2$) використовуємо варіанти, наведені в табл. 5.1. Кожен з варіантів основної системи задовольняє умові геометричної незмінюваності.

Для розрахунку обираємо основну систему, наведену на рис. 5.1, б. Ця система найбільш зручна для розрахунку, зокрема не містить замкнутих

тришарнірних контурів (як на рис. 5.1, в), і не являє собою тришарнірну раму (як на рис. 5.1, г).

Канонічні рівняння для $n=2$ запишемо згідно з (2.2) так:

$$\delta_{11} \cdot X_1 + \delta_{12} \cdot X_2 + \Delta_{1f} = 0,$$

$$\delta_{21} \cdot X_1 + \delta_{22} \cdot X_2 + \Delta_{2f} = 0.$$

Побудова епюр згинаючих моментів в основній системі.

Детально розглянемо розрахунок основної системи на дію заданого навантаження (рис. 5.2, а).

Визначаємо опорні реакції від навантаження:

$$\sum M_B = 0; R_A \cdot 8 - (q \cdot 6) \cdot 7 - F \cdot 4,5 = 0;$$

$$R_A = \frac{q \cdot 42 + F \cdot 4,5}{8} = \frac{4 \cdot 42 + 4 \cdot 4,5}{8} = 23,25 \text{ кН};$$

$$\sum M_A = 0; (q \cdot 6) \cdot 1 - F \cdot 4,5 - V_B \cdot 8 = 0;$$

$$V_B = \frac{q \cdot 6 - F \cdot 4,5}{8} = \frac{4 \cdot 6 - 4 \cdot 4,5}{8} = 0,75 \text{ кН};$$

$$\sum x = 0; H_B - F = 0; H_B = F = 4 \text{ кН}.$$

Перевіряємо реакції:

$$\sum y = R_A + V_B - q \cdot 6 = 23,25 + 0,75 - 4 \cdot 6 = 0.$$

Розбиваємо стержні рами на ділянки так, щоб їхніми межами були: вузли рами (точки з'єднання стержнів), точки прикладання зосереджених сил і зосереджених моментів, точки на кінцях розподіленого навантаження (у загальному випадку – точки зміни інтенсивності розподіленого навантаження). У цьому прикладі, з урахуванням того, що затяжка працює на розтяг-стиск, маємо 8 ділянок (I...VIII на рис. 5.2, а).

Почнемо з ділянки I. Вона являє собою консоль, завантажену рівномірно розподіленим навантаженням. Епюра моментів тут буде стандартною зі значенням згинального моменту в перерізі біля вузла

$M = -\frac{q \cdot \ell^2}{2} = -\frac{4 \cdot 2^2}{2} = -8 \text{ кНм}$. На вільному кінці консолі епюра моментів нульова і дотична до осі стержня.

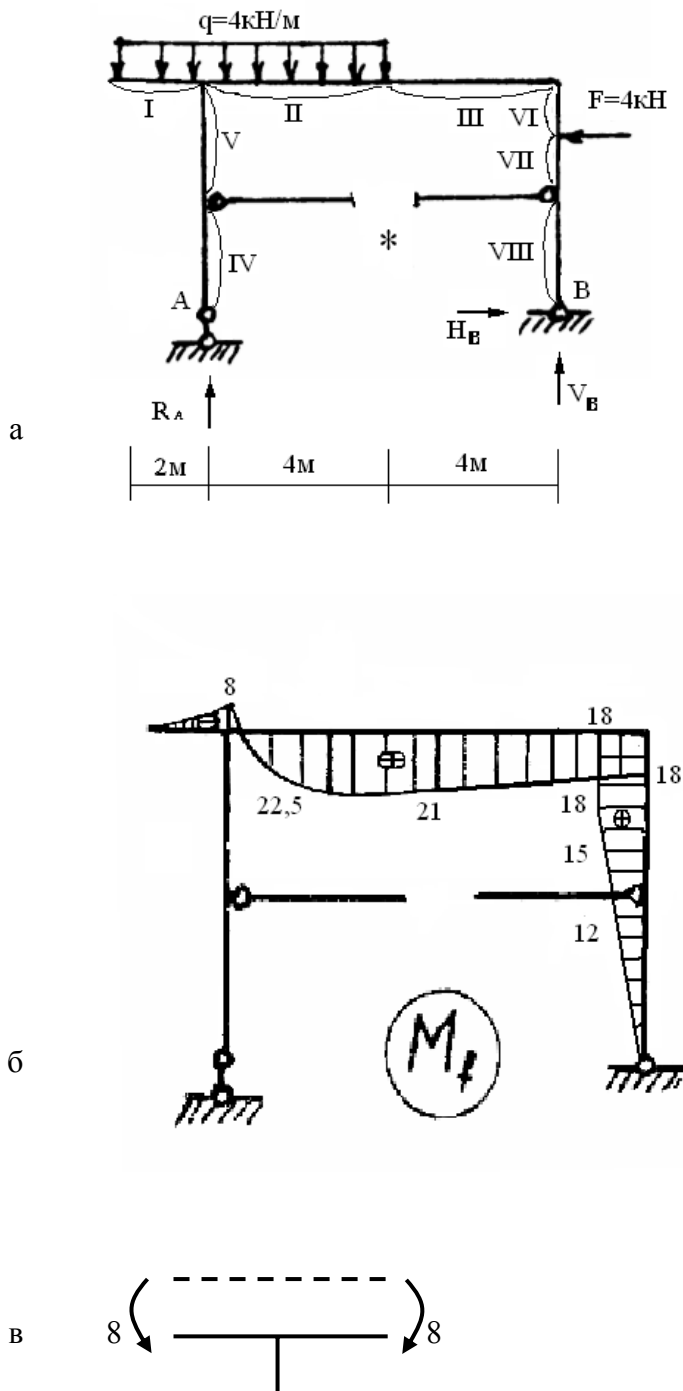


Рис. 5.2

Ділянка II завантажена рівномірно розподіленим навантаженням q , отже епюра моментів має вигляд квадратної параболи. Тому для побудування епюри необхідно мати не менше трьох значень моментів. На лівому кінці (нескінченно близько до лівого кінця ділянки), розглядаючи ліві сили, маємо:

$$M_{\text{лів}} = R_A \cdot 0 - (q \cdot 2) \cdot 1 = 0 - 4 \cdot 2 \cdot 1 = -8 \text{ кНм},$$

на правому (нескінченно близько до правого кінця):

$$M_{\text{прав}} = R_A \cdot 4 - (q \cdot 6) \cdot 3 = 23,25 \cdot 4 - 4 \cdot 18 = 21 \text{ кНм}.$$

Додаткове, третє, значення зручно отримати в середньому перерізі ділянки за формулою

$$M_{\text{ср}} = \frac{M_{\text{прав}} + M_{\text{лів}}}{2} + \frac{q\ell^2}{8}, \quad (5.1)$$

де $M_{\text{прав}}$ і $M_{\text{лів}}$ - згинаючі моменти на правому й лівому кінцях ділянки довжиною ℓ , завантаженої рівномірно розподіленим навантаженням q .

Відзначимо, що значення моментів необхідно брати з урахуванням їхнього знаку відповідно до пояснень до (2.15). Знак перед другим доданком у (5.1) відповідає напрямку навантаження донизу, в іншому випадку його треба змінити на зворотній.

Отже для ділянки II маємо:

$$M_{\text{ср}} = \frac{21 - (-8)}{2} + \frac{4 \cdot 4^2}{8} = 22,5 \text{ кНм}.$$

На ділянці III навантаження відсутнє, отже для побудови епюри достатньо двох значень моментів на кінцях:

$$M_{\text{лів}} = R_A \cdot 4 - (q \cdot 6) \cdot 3 = 23,25 \cdot 4 - 4 \cdot 18 = 21 \text{ кНм},$$

$$M_{\text{прав}} = R_A \cdot 8 - (q \cdot 6) \cdot 7 = 23,25 \cdot 8 - 4 \cdot 41 = 18 \text{ кНм},$$

$$\text{або } M_{\text{прав}} = H_B \cdot 6 + V_B \cdot 0 - F \cdot 1,5 = 4 \cdot 6 + 0 - 4 \cdot 1,5 = 18 \text{ кНм}.$$

Оскільки на ділянках, що залишились, розділене навантаження відсутнє, далі на кожній ділянці будемо знаходити по два значення моментів – на кінцях.

Для визначення знаків моментів на вертикальних елементах рами (стояках) оберемо точку всередині рами (*) і дивимосся на відповідну ділянку, подумки стоячи в цій точці.

Тоді для ділянки VI маємо на верхньому (лівому відносно точки *) кінці:

$$M_{\text{лів}} = H_B \cdot 6 - F \cdot 1,5 = 4 \cdot 6 - 4 \cdot 1,5 = 18 \text{ кНм},$$

і нижньому (правому відносно точки *):

$$M_{\text{прав}} = H_B \cdot 4,5 - F \cdot 0 = 4 \cdot 4,5 - 0 = 18 \text{ кНм}.$$

Моменти на інших ділянках наведемо без пояснень.

Ділянка VII:

$$M_{\text{лів}} = H_B \cdot 4,5 = 4 \cdot 4,5 = 18 \text{ кНм},$$

$$M_{\text{прав}} = H_B \cdot 3 = 4 \cdot 3 = 12 \text{ кНм}.$$

Ділянка VIII:

$$M_{\text{лів}} = H_B \cdot 3 = 4 \cdot 3 = 12 \text{ кНм},$$

$$M_{\text{прав}} = 0.$$

Неважко побачити, що в усіх перерізах ділянок IV та V згинаючі моменти дорівнюють нулю (простіше при цьому розглядати сили, розташовані ліворуч від цих перерізів).

За результатами розрахунків будуємо епюру M_f (рис. 5, б). Нагадаємо, що додатні моменти відкладаються донизу.

Для перевірки епюри треба розглянути рівновагу вузлів рами. Так, вирізаючи лівий вузол рами (рис. 5, в) прикладаємо на кінцях стержнів моменти, беручи їх значення з епюри моментів. Для визначення напрямку моменту пам'ятаємо, що згинаючі моменти за нашими правилами повинні на епюрі розташовуватися з боку розтягнутих волокон. Отже, відзначивши пунктиром (рис. 5, в) той бік, де волокна розтягнуті, прикладаємо у відповідному напрямку момент. Сума моментів у вузлі повинна дорівнювати нулю:

$$8 - 8 = 0.$$

Зазначимо, що рівновагу двостержневого вузла можна перевірити формально. Для цього треба подумки повернути стержні разом з епюрами так, щоб вони розташувались на одній прямій. Якщо вузол врівноважений, то ординати повинні співпасти одна з одною. Неспівпадіння можливе лише в разі дії на вузол зовнішнього зосередженого моменту. В такому разі краще для перевірки рівноваги вирізати вузол окремо.

Нагадаємо, що в межах кожного стержня (між суміжними вузлами рами) для епюр моментів дійсними є правила, що наводяться для балок. Наприклад, “стрибок” на епюрі повинен бути тільки в точках прикладання зосереджених моментів.

Так само виконуємо розрахунок рами на дію зайвого невідомого $X_1 = 1$ (рис. 6, а) і одержуємо епюру \bar{M}_1 (рис. 6, б).

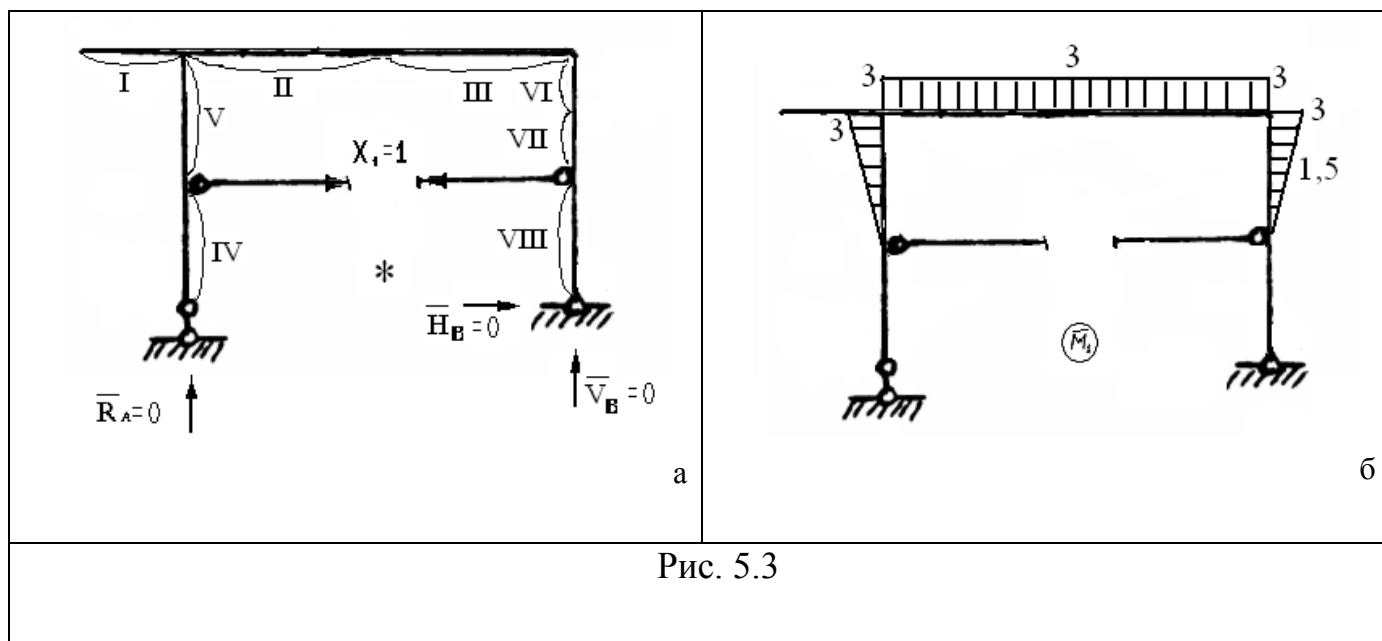


Рис. 5.3

Побудова епюри \bar{M}_2 від дії $X_2 = 1$ наведена на рис. 5.4.

При побудові всіх епюр необхідно дотримуватись масштабу, який для кожної епюри можна приймати свій, незалежно від інших. При цьому бажано аналізувати стикування епюр на сусідніх ділянках. Наприклад, на епюрі M_f $M_{\text{прав}}^{\text{VI}} = M_{\text{лів}}^{\text{VII}} = 18 \text{ кНм}$. Аналогічні співвідношення мають місце і на межах інших ділянок цієї та одиничних епюр. Крім того, епюри суміжних ділянок можуть розташовуватися на одній прямій (наприклад на ділянках IV і V епюри \bar{M}_2).

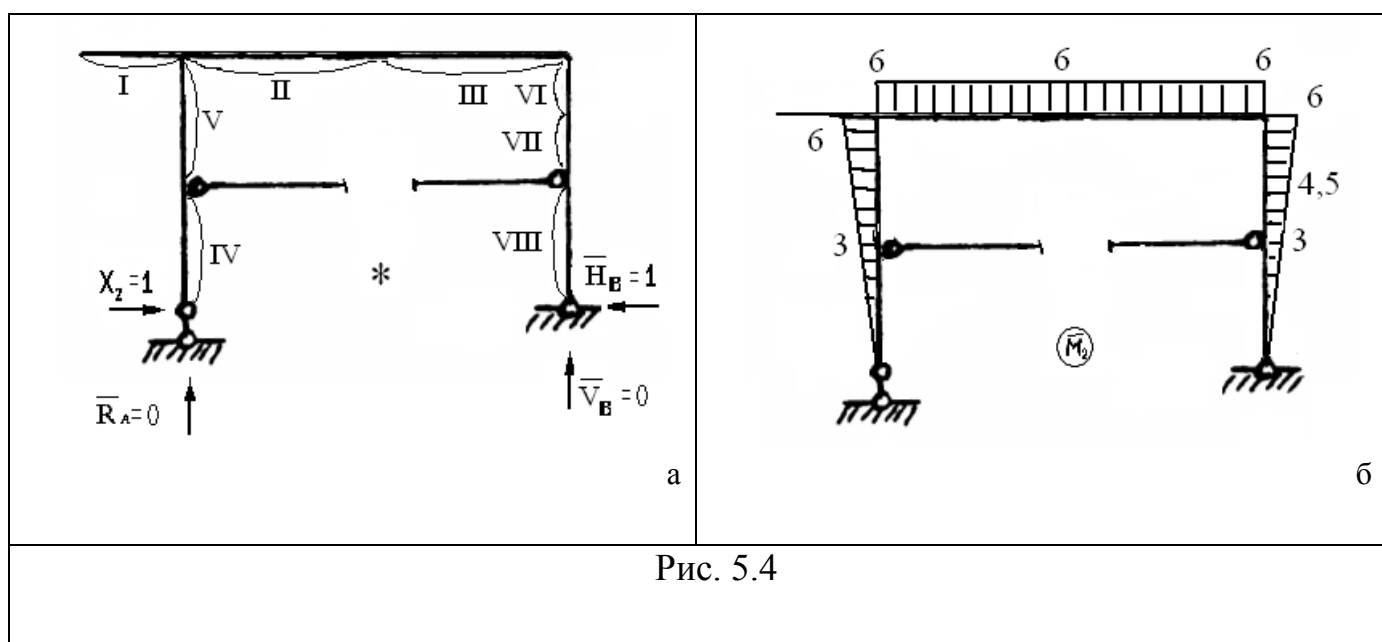


Рис. 5.4

Поділ рами на ділянки в прикладі вже виконано при побудові епюр згинаючих моментів. Їхня нумерація наведена на рис. 5, а.

Запис матриці одиничних вантажних моментів зручно виконати окремо для кожної ділянки у вигляді транспонованих матриць.

Так, для першої ділянки:

$$\{M_{1f}\}^T = [0 \quad -2 \quad -8];$$

$$\{\bar{M}_{11}\}^T = [0 \quad 0 \quad 0]; \quad \{\bar{M}_{12}\}^T = [0 \quad 0 \quad 0].$$

Зазначимо, що недостаючи значення моментів у серединах ділянок знаходимо за (5.1). При відсутності розподіленого навантаження ця формула набуває вигляду

$$M_{cp} = \frac{M_{прав} + M_{лів}}{2}.$$

Для інших ділянок транспоновані матриці моментів будуть такими:

$$\{M_{2f}\}^T = [-8 \quad 22,5 \quad 21]; \quad \{M_{3f}\}^T = [21 \quad 19,5 \quad 18];$$

$$\{M_{4f}\}^T = [0 \quad 0 \quad 0]; \quad \{M_{5f}\}^T = [0 \quad 0 \quad 0];$$

$$\{M_{6f}\}^T = [18 \quad 18 \quad 18]; \quad \{M_{7f}\}^T = [18 \quad 15 \quad 12];$$

$$\{M_{8f}\}^T = [12 \quad 0 \quad 0];$$

$$\{\bar{M}_{21}\}^T = [-3 \quad -3 \quad -3]; \quad \{\bar{M}_{31}\}^T = [-3 \quad -3 \quad -3];$$

$$\{\bar{M}_{41}\}^T = [0 \quad 0 \quad 0]; \quad \{\bar{M}_{51}\}^T = [0 \quad -1,5 \quad -3];$$

$$\{\bar{M}_{61}\}^T = [-3 \quad -2,25 \quad -1,5]; \quad \{\bar{M}_{71}\}^T = [-1,5 \quad -0,75 \quad 0];$$

$$\{\bar{M}_{81}\}^T = [0 \quad 0 \quad 0];$$

$$\{\bar{M}_{22}\}^T = [-6 \quad -6 \quad -6]; \quad \{\bar{M}_{32}\}^T = [-6 \quad -6 \quad -6];$$

$$\{\bar{M}_{42}\}^T = [0 \quad -1,5 \quad -3]; \quad \{\bar{M}_{52}\}^T = [-3 \quad -4,5 \quad -6];$$

$$\{\bar{M}_{62}\}^T = [-6 \quad -5,25 \quad -4,5]; \quad \{\bar{M}_{72}\}^T = [-4,5 \quad -3,75 \quad -3];$$

$$\{\bar{M}_{82}\}^T = [-3 \quad -1,5 \quad 0].$$

Побудова остаточної епюри згинаючих моментів.

За результатами розрахунків маємо:

$$\{M_1\}^T = [0 \quad -2 \quad -8]; \quad \{M_2\}^T = [-23,02 \quad 7,48 \quad 5,98];$$

$$\{M_3\}^T = [5,98 \quad 4,48 \quad 2,98]; \quad \{M_4\}^T = [0 \quad -2,53 \quad -5,06];$$

$$\{M_5\}^T = [-5,06 \quad -10,04 \quad -15,02]; \quad \{M_6\}^T = [2,98 \quad 5,47 \quad 7,96];$$

$$\{M_7\}^T = [7,96 \quad 7,45 \quad 6,94]; \quad \{M_8\}^T = [6,94 \quad 3,47 \quad 0].$$

При побудові остаточної епюри слід пам'ятати, що на ділянках без розподіленого навантаження вона лінійна. Отже в такому випадку значення згинаючого моменту в середині ділянки є зайвим і його треба ігнорувати. Для цього прикладу епюра згинаючих моментів наведена на рис. 5.5, а.

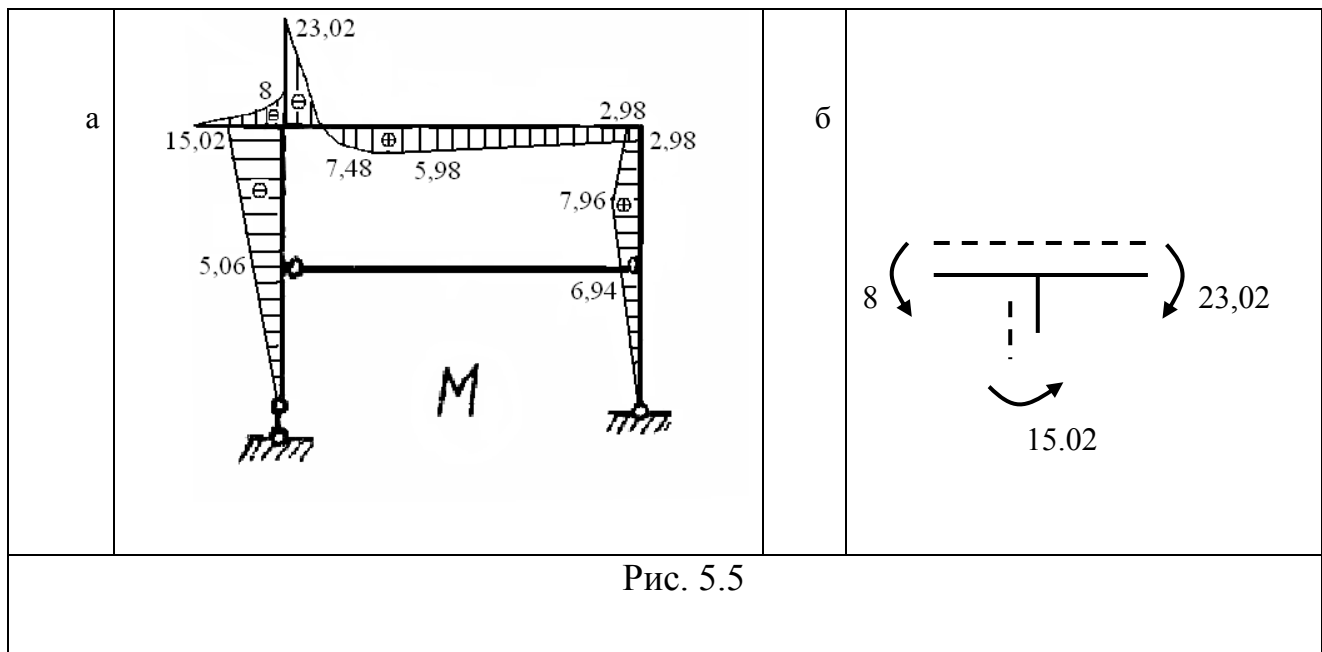
Перевірка рівноваги лівого вузла ригеля за рис. 5.5, б дає:

$$\sum M = 23,02 - 8 - 15,02 = 0.$$

Правий двостержневий вузол перевіряємо за формальним правилом (див. побудову епюри M_f).

Визначення поперечних сил виконуємо за формулою (2.15).

$$Q_{1\frac{\text{лів}}{\text{прав}}} = \frac{-8-0}{2} \pm \frac{4 \cdot 2}{2} = -4 \pm 4 = \begin{cases} Q_{1\text{ лів}} = -4 + 4 = 0 \text{ кН,} \\ Q_{1\text{ прав}} = -4 - 4 = -8 \text{ кН;} \end{cases}$$



$$Q_{2 \frac{\text{лів}}{\text{прав}}} = \frac{-5,98 - (-23,02)}{4} \pm \frac{4 \cdot 4}{2} = -7,25 \pm 8 = \begin{cases} Q_{1 \text{ лів}} = 7,25 + 8 = 15,25 \text{ кН}, \\ Q_{1 \text{ прав}} = 7,25 - 8 = -0,75 \text{ кН}; \end{cases}$$

$$Q_3 = \frac{2,98 - 5,98}{4} = -0,75 \text{ кН}; \quad Q_4 = \frac{5,06 - 0}{3} = -1,69 \text{ кН};$$

$$Q_5 = \frac{-15,02 - (-5,06)}{3} = -3,32 \text{ кН}; \quad Q_6 = \frac{7,96 - 2,98}{1,5} = 3,32 \text{ кН};$$

$$Q_7 = \frac{6,94 - 7,96}{1,5} = -0,68 \text{ кН}; \quad Q_8 = \frac{0 - 6,94}{3} = -2,31 \text{ кН}.$$

За цими даними будуюмо епюру поперечних сил Q (рис. 5.6).

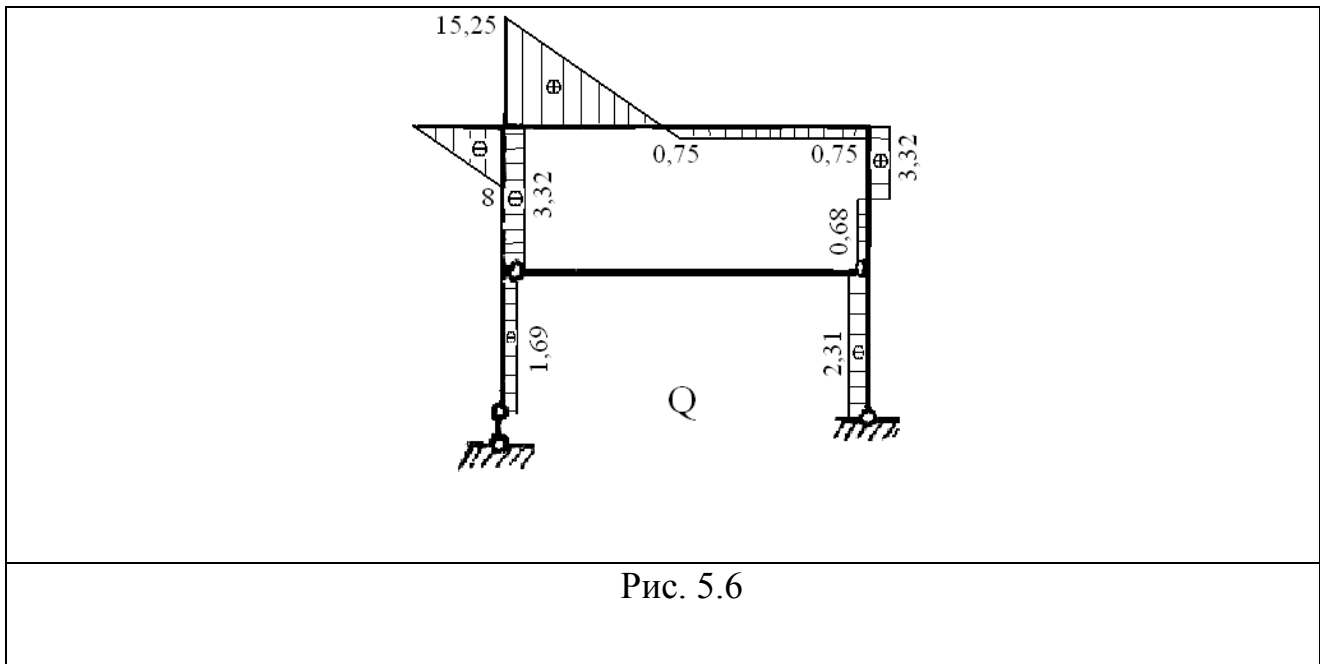
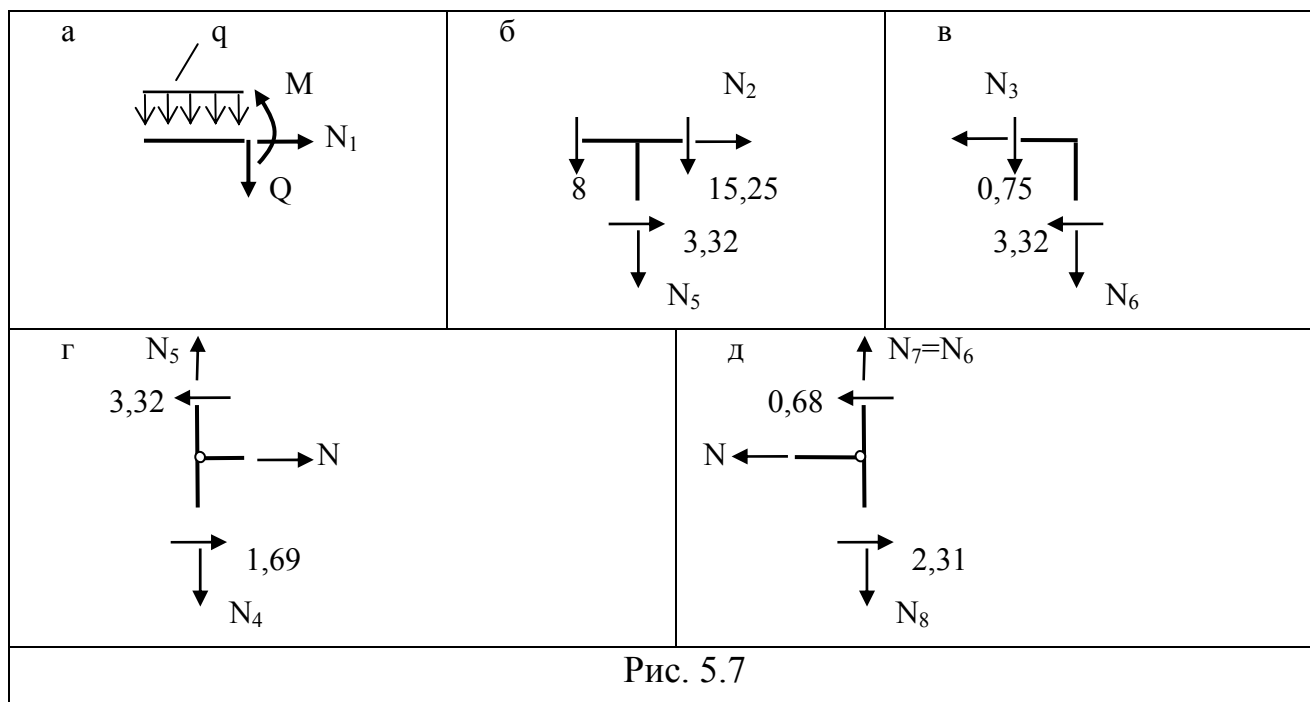


Рис. 5.6

Визначення поздовжніх сил виконуємо вирізанням вузлів. Попередньо, відсікаючи консольну частину (рис. 5.7, а), можна визначити поздовжню силу в довільному її перерізі: $N_1 = 0$. Далі розглядаємо лівий вузол рами (рис. 5.7, б):

$$\sum x; \quad N_2 + 3,32 = 0; \quad N_2 = -3,32 \text{ кН};$$

$$\sum y; \quad 8 + 15,25 + N_5 = 0; \quad N_5 = -23,25 \text{ кН}.$$



Наступний вузол можна взяти на правому кінці ригеля (рис. 5.7, в). Слід мати на увазі, що уздовж окремого стержня поздовжня сила може змінюватися лише за наявності такого навантаження, яке не перпендикулярне до осі стержня. Отже, маємо $N_3 = N_2 = -3,23 \text{ кН} = \text{const}$. Тоді рівняння $\sum x = N_3 + 3,32 = -3,32 + 3,32 = 0$ обертається на тотожність і може служити однією з перевірок розрахунку. Друге рівняння дає: $N_6 = -0,75 \text{ кН}$.

Далі можемо в будь-якій послідовності розглядати вузли на кінцях затяжки: рис. 5.7, д, з рівноваги якого маємо:

$$N = 3,32 - 1,69 = 1,63 \text{ кН};$$

$$N_4 = N_5 = -23,25 \text{ кН};$$

$$N_8 = N_7 = N_6 = -0,75 \text{ кН}$$

$$\text{і ще одна перевірка: } 2,31 - 0,68 - N = 2,31 - 0,68 - 1,63 = 0.$$

За обчисленими даними будуюмо епюру поздовжніх сил (рис. 5.8).

Як відомо, ригелі рам споруд зазнають переважно деформації згину, а стояки – згин зі стиском (позацентровий стиск). Отже в розглянутому прикладі найбільш навантаженим є лівий переріз ригеля ($|M|_{\max} = 23,02 \text{ кНм}$) і верхній переріз лівого стояка ($|N|_{\max} = 23,25 \text{ кН}$, $|M|_{\max} = 15,02 \text{ кНм}$).

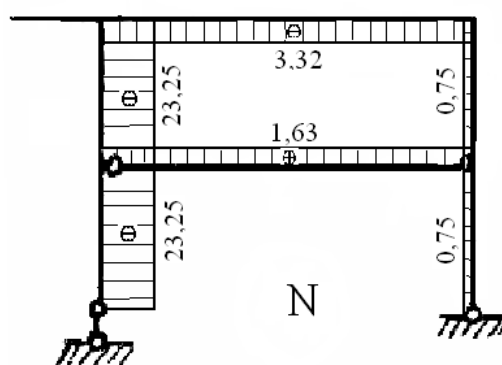
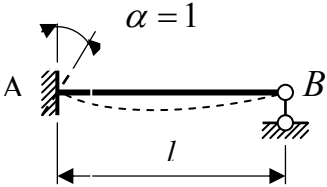
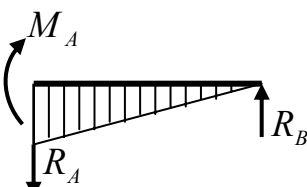
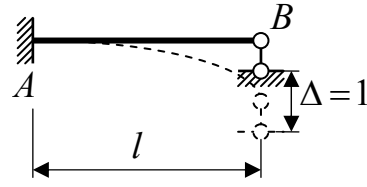
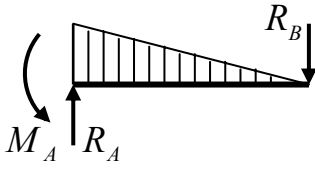
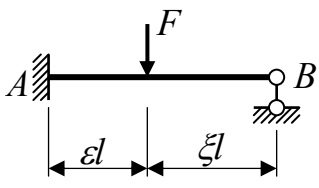
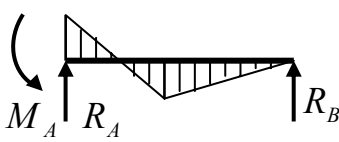
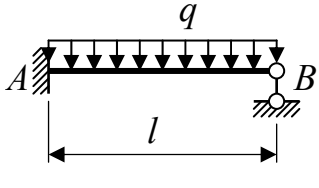
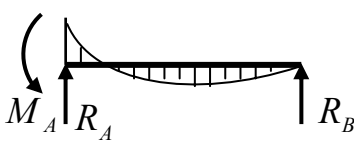
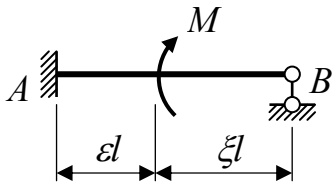
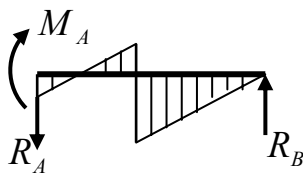
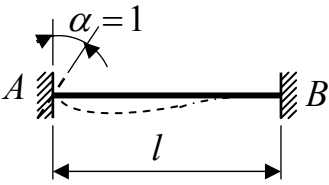
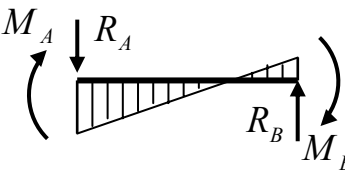
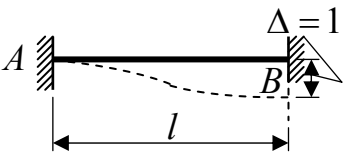
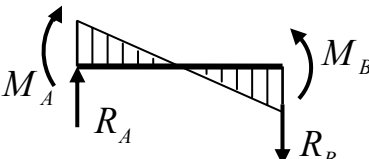
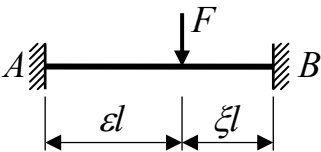
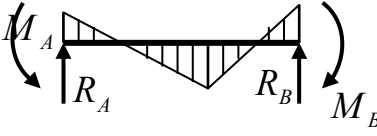
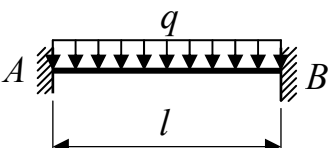
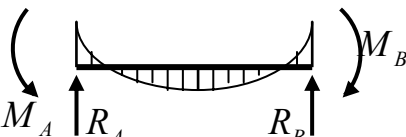
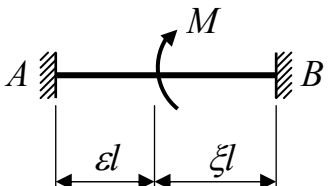
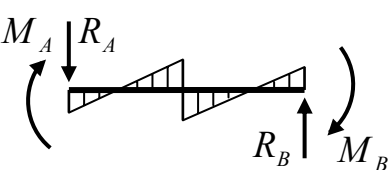


Рис. 5.8

ДОДАТОК

Таблиця Д1

№ з/п	Схема балки і вплив на неї	Епюра згинаючих моментів і реакції	Формули для визначення реакцій
1	2	3	4
1			$M_A = 3EI / l$ $R_A = R_B = 3EI / l^2$
2			$M_A = 3EI / l^2$ $R_A = R_B = 3EI / l^3$
3			$M_A = \frac{Fl}{2} \xi (1 - \xi^2)$ $R_A = \frac{F}{2} \xi (3 - \xi^2)$ $R_B = \frac{F}{2} \epsilon^2 (3 - \epsilon)$
4			$M_A = ql^2 / 8$ $R_A = 5ql / 8$ $R_B = 3ql / 8$
5			$M_A = \frac{M}{2} (1 - 3\xi^2)$ <p>(при $\xi^2 > 1/3$ момент змінює напрямок на протилежний)</p> $R_A = R_B = \frac{3M}{2l} (1 - \xi^2)$

1	2	3	4
6			$M_A = 4EI / l$ $M_B = 2EI / l$ $R_A = R_B = 6EI / l^2$
7			$M_A = M_B = 6EI / l^2$ $R_A = R_B = 12EI / l^3$
8			$M_A = Fl\epsilon\xi^2$ $M_B = Fl\epsilon^2\xi$ $R_A = F\xi^2(1 + 2\epsilon)$ $R_B = F\epsilon^2(1 + 2\xi)$
9			$M_A = M_B = ql^2 / 12$ $R_A = R_B = ql / 2$
10			$M_A = M\xi(2 - 3\xi)$ $M_B = M\epsilon(2 - 3\epsilon)$ $R_A = R_B = \frac{M}{l} 6\epsilon\xi$

СПИСОК ДЖЕРЕЛ

1. Строительная механика. Краткий курс /Раздел 2. Статически определимые стержневые системы. Шутенко Л.Н., Пустовойтов В.П., Засядько Н.А. – Харьков: ХГАГХ, 2003. – 85 с.
2. Строительная механіка: Учебник для вузов / Ю.И.Бутенко, Н.А.Засядько, С.Н.Кан и др.; под ред. Ю.И. Бутенко – К.: Вища школа, 1989. – 479 с.
3. Строительная механика: Руководство к практическим занятиям / Ю.И. Бутенко, Н.А.Засядько, С.Н.Кан и др.; под ред. Ю.И. Бутенко – К.: Вища школа, 1989. – 376 с.
4. Механіка споруд. Шутенко Л.М., Пустовойтов В.П., Засядько М.А., Харків, ХДАМГ, 2001. – 239 с.

Методичні вказівки до самостійної роботи, підготовки до лекцій і практичних занять, розрахунково-графічних та контрольних робіт зі спецкурсу будівельної механіки «Розрахунок статично невизначених рам» (для слухачів другої вищої освіти напряму спеціальності 7.06010101 – «Промислове та цивільне будівництво»)

Укладач: **ЧУПРИНІН** Олександр Олексійович

Відповідальний за випуск Л. С. Андрієвська

За авторською редакцією

Комп'ютерне верстання О. О. Чупринін

План 2013, поз. 147 М

Підп. до друку 4.06.2013
Друк на ризографі
Тираж 50 пр.

Формат 60*84 1/16
Ум. друк. арк. 4,0
Зам. №

Видавець і виготовлювач:
Харківський національний університет
міського господарства імені О. М. Бекетова
вул. Революції, 12, Харків, 61002
Електронна адреса: rectorat@kname.edu.ua
Свідectво суб'єкта видавничої справи:
ДК № 4705 від 28.03.2014 р.